

Desatinné rozvoje racionálnych čísel

Najskôr nájdeme desatinné rozvoje niekoľkých racionálnych čísel.

Nech $q = \frac{57}{8}$. Delením zistíme, že:

$$\begin{array}{r} 57 : 8 = 7,125 \\ \underline{10} \\ 20 \\ \underline{16} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$$

Teda $\frac{57}{8} = 7 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} = 7,125$. Rozvoj čísla $\frac{57}{8}$ je ukončený.

Nech $q = \frac{35517}{400}$. Delením zistíme, že:

$$\begin{array}{r} 35517 : 400 = 88,7925 \\ \underline{320} \\ 3517 \\ \underline{3200} \\ 3170 \\ \underline{3160} \\ 1000 \\ \underline{800} \\ 2000 \\ \underline{2000} \\ 0 \end{array}$$

Teda $\frac{35517}{400} = 88 + \frac{7}{10} + \frac{9}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{5}{10000} = 88,7925$. Rozvoj čísla $\frac{35517}{400}$ je ukončený.

Nech $q = \frac{359}{6}$. Delením zistíme, že:

$$\begin{array}{r} 359 : 6 = 59,8\overline{3} \\ \underline{30} \\ 59 \\ \underline{54} \\ 50 \\ \underline{48} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 20 \end{array}$$

Akonáhle zistíme, že sa zopakoval ten istý zvyšok, nemá zmysel deliť ďalej, lebo určitá skupina cifier (v tomto prípade cifra 3) sa bude opakovať. Takéto opakovanie zapíšeme pomocou periódy, ktorú vyznačíme čiarou nad číslicami, ktoré sa opakujú.

Teda $\frac{359}{6} = 59 + \frac{8}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} + \frac{3}{1000000} + \dots = 59,8\overline{3}$. Rozvoj čísla $\frac{359}{6}$

je periodický s predperiódou 8 a periódou 3.

Nech $q = \frac{359}{11}$. Delením zistíme, že:

$$\begin{array}{r} 3270 \\ 11 \overline{) 3590} \\ \underline{330} \\ 290 \\ \underline{220} \\ 700 \\ \underline{660} \\ 400 \\ \underline{330} \\ 700 \\ \underline{660} \\ 400 \end{array} : 11 = 32,63$$

Akonáhle zistíme, že sa zopakoval ten istý zvyšok, nemá zmysel deliť ďalej, lebo určitá skupina cifier (v tomto prípade 63) sa bude opakovať. Takéto opakovanie zapíšeme pomocou periódy, ktorú vyznačíme čiarou nad číslicami, ktoré sa opakujú.

Teda $\frac{359}{11} = 32 + \frac{6}{10} + \frac{3}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{6}{100000} + \frac{3}{1000000} + \dots = 32,\overline{63}$. Rozvoj čísla $\frac{359}{11}$ je periodický s periódou 63.

Nech $q = \frac{419}{28}$. Delením zistíme, že:

$$\begin{array}{r} 1496428571 \\ 28 \overline{) 4190000000} \\ \underline{560} \\ 1590 \\ \underline{1120} \\ 4700 \\ \underline{4480} \\ 2200 \\ \underline{1680} \\ 5200 \\ \underline{5600} \\ 4000 \\ \underline{2800} \\ 1200 \\ \underline{1120} \\ 80 \\ \underline{56} \\ 24 \\ \underline{16} \\ 80 \\ \underline{56} \\ 24 \\ \underline{16} \\ 80 \end{array} : 28 = 14,96428571$$

Akonáhle zistíme, že sa zopakoval ten istý zvyšok, nemá zmysel deliť ďalej, lebo určitá skupina cifier (v tomto prípade 428571) sa bude opakovať. Takéto opakovanie zapíšeme pomocou periódy, ktorú vyznačíme čiarou nad číslicami, ktoré sa opakujú.

Teda

$$\frac{419}{28} = 14 + \frac{9}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{8}{10^5} + \frac{5}{10^6} + \frac{7}{10^7} + \frac{1}{10^8} + \frac{4}{10^9} + \frac{2}{10^{10}} + \frac{8}{10^{11}} + \frac{5}{10^{12}} + \frac{7}{10^{13}} + \frac{1}{10^{14}} + \dots = 14,\overline{96428571}$$

Rozvoj čísla $\frac{419}{28}$ je periodický s predperiódou 96 a periódou 428571.

Poznatky získané na predchádzajúcich príkladoch si sformulujeme vo forme vety.

Každé racionálne číslo možno vyjadriť ukončeným alebo periodickým desatinným rozvojom.

V literatúre sa častokrát nerozlišuje medzi ukončeným a periodickým rozvojom, nakoľko ukončený rozvoj možno považovať za špeciálny prípad periodického rozvoja, v ktorom je pod periódou číslica nula.

Hlbším štúdiom by sme mohli zistiť, že **rozvoj je ukončený vtedy, ak menovateľ racionálneho čísla zapísaného v základnom tvare má v kanonickom rozklade menovateľa iba prvočísla 2 a 5. Ak sa v takomto rozklade vyskytne aj iné prvočíсло, rozvoj nie je ukončený.**

Teraz sa budeme venovať opačnému postupu. Číslo zapísané pomocou ukončeného či periodického rozvoja budeme zapisovať v tvare zlomku. K tomu si potrebujeme zopakovať zopár poznatkov o geometrických postupnostiach.

Geometrická postupnosť je taká postupnosť čísel, v ktorej každý ďalší člen získame z predchádzajúceho člena vynásobením tým istým číslom, ktoré nazývame kvocient a označujeme q .

Postupnosť čísel 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, ... je geometrická s kvocientom $q = 2$, lebo každé ďalšie číslo je 2-násobkom predchádzajúceho.

Postupnosť čísel 5, 15, 45, 135, 405, 1215, 3675, 10935, 32805, ... je geometrická s kvocientom $q = 3$, lebo každé ďalšie číslo je 3-násobkom predchádzajúceho.

Postupnosť čísel $64, 32, 16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \dots$ je geometrická s kvocientom $q = \frac{1}{2}$, lebo každé ďalšie číslo je $\frac{1}{2}$ -násobkom predchádzajúceho.

Postupnosť čísel $81, -27, 9, -3, 1, \frac{-1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{-1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{-1}{243}, \dots$ je geometrická s kvocientom $q = \frac{-1}{3}$, lebo každé ďalšie číslo je $\frac{-1}{3}$ -násobkom predchádzajúceho.

Ak je kvocientom geometrickej postupnosti číslo väčšie ako -1 a menšie ako 1 , potom súčet nekonečnej geometrickej postupnosti s prvým členom a_1 je určený vzorcom $s = \frac{a_1}{1-q}$.

Teda súčtom postupnosti čísel $64, 32, 16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \dots$ je

$$s = \frac{64}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{64}{\frac{1}{2}} = 128. \text{ Podobne, súčtom postupnosti čísel } 81, -27, 9, -3, 1, \frac{-1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{-1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{-1}{243}, \dots$$

$$\text{je } s = \frac{81}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{81}{\frac{4}{3}} = \frac{81 \cdot 3}{4} = \frac{243}{4}.$$

Teraz prejdeme k vyjadreniu ukončeného a periodického rozvoja pomocou zlomku.

$$\text{Nech } q = 23,675. \text{ Potom } q = 23 + \frac{6}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} = \frac{23675}{1000} = \frac{4735}{200} = \frac{947}{40}.$$

Nech $q = 597,9375$. Potom

$$q = 597 + \frac{9}{10} + \frac{3}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{5}{10000} = \frac{5979375}{10000} = \frac{1195875}{2000} = \frac{239175}{400} = \frac{47835}{80} = \frac{9567}{16}.$$

Nech $q = 23,6\bar{6}$. Potom $q = 23 + \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \dots$ Postupnosť $\frac{6}{10}, \frac{6}{100}, \frac{6}{1000}, \dots$ je

$$\text{geometrická s } a_1 = \frac{6}{10} \text{ a } q = \frac{1}{10}, \text{ preto } \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \dots = \frac{\frac{6}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{6}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Potom } q = 23 + \frac{2}{3} = \frac{69 + 2}{3} = \frac{71}{3}.$$

Nech $q = 23,72\bar{6}$. Potom $q = 23 + \frac{7}{10} + \frac{2}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{6}{10000} + \frac{6}{100000} + \dots$ Postupnosť

$$\frac{6}{1000}, \frac{6}{10000}, \frac{6}{100000}, \dots \text{ je geometrická s } a_1 = \frac{6}{1000} \text{ a } q = \frac{1}{10}, \text{ preto}$$

$$\frac{6}{1000} + \frac{6}{10000} + \frac{6}{100000} + \dots = \frac{\frac{6}{1000}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{6}{1000}}{\frac{9}{10}} = \frac{60}{9000} = \frac{2}{300}.$$

$$\text{Potom } q = 23 + \frac{7}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{300} = \frac{6900 + 210 + 6 + 2}{300} = \frac{7118}{300} = \frac{3559}{150}.$$

$$\text{Nech } q = 23, \overline{726}.$$

$$\begin{aligned} \text{Potom } q &= 23 + \frac{7}{10} + \frac{2}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{2}{10000} + \frac{6}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \dots = \\ &= 23 + \frac{7}{10} + \frac{26}{1000} + \frac{26}{100000} + \frac{26}{10000000} + \dots \text{ Postupnosť } \frac{26}{1000}, \frac{26}{100000}, \frac{26}{10000000}, \dots \text{ je} \end{aligned}$$

geometrická s $a_1 = \frac{26}{1000}$ a $q = \frac{1}{100}$, preto

$$\frac{26}{1000} + \frac{26}{100000} + \frac{26}{10000000} + \dots = \frac{\frac{26}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{26}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{2600}{99000} = \frac{26}{990} = \frac{13}{495}.$$

$$\text{Potom } q = 23 + \frac{7}{10} + \frac{13}{495} = \frac{113850 + 3465 + 130}{4950} = \frac{117445}{4950} = \frac{23489}{990}.$$

$$\text{Nech } q = 23, \overline{726}.$$

$$\begin{aligned} \text{Potom } q &= 23 + \frac{7}{10} + \frac{2}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{7}{10000} + \frac{2}{100000} + \frac{6}{1000000} + \dots = \\ &= 23 + \frac{726}{1000} + \frac{726}{1000000} + \frac{726}{1000000000} + \dots \text{ Postupnosť } \frac{726}{1000}, \frac{726}{1000000}, \frac{726}{1000000000}, \dots \text{ je} \end{aligned}$$

geometrická s $a_1 = \frac{726}{1000}$ a $q = \frac{1}{1000}$, preto

$$\frac{726}{1000} + \frac{726}{1000000} + \frac{726}{1000000000} + \dots = \frac{\frac{726}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{\frac{726}{1000}}{\frac{999}{1000}} = \frac{726}{999} = \frac{242}{333}.$$

$$\text{Potom } q = 23 + \frac{242}{333} = \frac{7659 + 242}{333} = \frac{7901}{333}.$$

Poznatky získané na predchádzajúcich príkladoch si opäť sformulujeme vo forme vety.

Ak je desatinný rozvoj reálneho čísla r konečný alebo periodický, potom číslo r je racionálne.

Dôkazy oboch vyššie uvedených viet neuvádzame. Vidíme teda, že každé racionálne číslo má ukončený alebo periodický desatinný rozvoj a každý takýto rozvoj je rozvojom racionálneho čísla. Čo však neperiodické rozvoje. A existujú vôbec? To si povieme v nasledujúcej podkapitole.