

PENTOMINO AKO PROSTRIEDOK ROZVOJA PRIESTOROVEJ PREDSTAVIVOSTI

Zuzana Zaduban¹, Oliver Židek²

¹Katedra matematiky a informatiky, Pedagogická fakulta, Trnavská univerzita
Priemyselná 4, P. O. Box 9, 918 43 Trnava, SR
e-mail: zaduban.z@gmail.com

²Katedra matematiky a informatiky, Pedagogická fakulta, Trnavská univerzita
Priemyselná 4, P. O. Box 9, 918 43 Trnava, SR
e-mail: oliver.zidek@gmail.com

Abstract. Zaduban, Z., Židek, O.: *Pentomino as a tool for development of spatial imagination, Paed. Univ. Tyrnaviensis, Ser. C.* The contribution deals with the importance of the development of spatial imagination and its influence on the quality of development in educational and personal life of an individual. The main benefit of this contribution is to assess the effectiveness of teaching methods of the mathematics using “pentomino” puzzles as well as the creation of new, non-traditional tasks based on these puzzles. In our case, this teaching method was proved as very effective and thus it opened the possibility of wider use in teaching of mathematics.

Keywords: Pentomino, combinatorics, planar shape, handling technology, visualization, space orientation

1 Úvod

Jedna z významných a užitočných kompetencií človeka pre bežný život a zvlášť pre niektoré povolania je geometrická predstavivosť. Z bežnej pedagogickej praxe, ale aj z rôznych výskumov sa ukazuje, že rozvoj tejto schopnosti nie je u žiakov základnej školy na požadovanej a očakávanej úrovni (Židek, 2005). Ako príčiny načrtnutého javu môžeme uviesť nasledujúce skutočnosti: v praxi sú uprednostňované iné témy, ktoré menej participujú na rozvoji uvedenej schopnosti, príčiny súčasného stavu sú do istej miery aj v dôsledku zníženia časovej dotácie vyučovania matematiky, ďalší dôvod je pravdepodobne v menšej pripravenosti učiteľov v tejto oblasti. Často sa stretávame s názorom i presvedčením, že geometrická predstavivosť je vrodená a niekto ju má a iný nie. I keď posledný dôvod má svoje čiastočné opodstatnenie, napriek tomu je známe, že priestorovú predstavivosť môžeme cieľavedome rozvíjať u všetkých žiakov, či študentov a to v každom veku.

2 Význam rozvoja priestorovej predstavivosti

Rozvíjanie priestorovej predstavivosti má pri vyučovaní matematiky významnú funkciu. Jednou z možností rozvoja uvedenej schopnosti je aj využitie rôznych geometrických skladačiek, kde je výučba žiakov dopĺňovaná o manuálnu činnosť a experimentovanie. V závislosti od náročnosti úlohy a prípravy pomôcok môžeme činnosti so skladačkami zaradiť vhodným spôsobom do vyučovacej hodiny v rôznych fázach, prípadne len na spestrenie vyučovania (Perný, 2003).

2.1 Rozvoj vlastností a zručností

V príspevku predkladáme čitateľovi jeden zo spôsobov a návodov ako sa dá pomerne jednoduchá skladačka využiť v prospech rozvoja priestorovej predstavivosti hravým spôsobom uplatnenia v škole, alebo v žiackom klube, prípadne v domácom prostredí. Z praxe, ale i z teórie sa môžeme domnievať, že využívanie rôznych skladačiek a stavebníc má aj rozmanitejšie didaktické efekty akými sú napríklad: rozvíjanie vlastností a zručností medzi ktoré patrí presnosť, pozornosť, schopnosť systematicky pracovať, rozvoj tvorivého a logického myslenia, posilňovanie sebadôvery. Tieto vlastnosti a zručnosti vzdelávaného subjektu majú význam nielen pri učení matematiky, ale v živote vôbec. V rámci rozvoja týchto kompetencií sa rozvíja predovšetkým oblasť priestorovej predstavivosti, ktorú si študenti i žiaci, môžu vytrvalým úsilím výrazne zdokonaľovať (Franke 2007). V opisovanej aktivite ide o rozvoj uvedených schopností v dvojdimenzionálnom priestore, iné vhodné činnosti podporujú rozvoj osobnosti využívajúc pri tom trojdimenzionálne objekty a činnosti s nimi.

2.2 Manipulačné technológie

Z rôznych výskumov a opisov didaktických situácií vyplýva, že pri manipulácii s vhodnými predmetmi pomôckového charakteru si žiak vlastnou činnosťou rýchlejšie a trvalejšie osvojí rôzne teoretické poznatky a získa praktické skúsenosti potrebné pre ďalšie štúdium, ale aj pre prax. Vo svojom príspevku poukazuje O. Židek (2003) na to, že v pedagogickej praxi sa výrazne osvedčil princíp využívania manipulačnej technológie, teda odporúča zaraďovať do vyučovacieho procesu viac manipulačnej činnosti žiakov. Podľa O. Žideka (2003) je nevyhnutné, aby geometrické modelovanie patrilo k bežným poznávacím činnostiam, nakoľko zapojenie hmatu poskytuje možnosť získať poznatky o geometrických útvaroch a telesách netradičným spôsobom. S načrtnutým postupom nepriamo súvisí aj téza M. Hejného, F. Kuřinu (2001), „že v matematike nejde v prvom rade o poznatky, ale skôr o vytváranie kladného pomeru k poznávaniu reality a k prispievaniu rozvoja kognitívnych schopností žiakov, o ich osobné dozrievanie“.

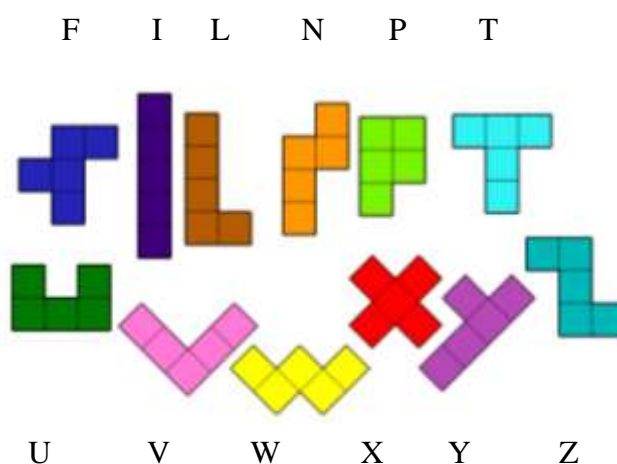
E. Krejčová, M. Volfová (2001) vo svojich prácach taktiež zdôrazňujú rôzne manipulačné činnosti, ktoré majú veľmi blízko ku hre a je vhodné ich do vyučovacieho procesu čo najčastejšie zaraďovať. Činnostné učenie vedie žiaka k spolupráci, podnikavosti a vynaliezavosti, učí žiaka, že trvalejšie vedomosti možno nadobudnúť na základe vlastnej činnosti. Učiteľ nemá predkladať žiakovi len hotové výsledky a poznatky k ich osvojeniu, ale má viesť žiaka k tomu, aby nové poznatky žiak získaval na základe činností, pozorovania, pokusov objavovaním. Výučba nezamestnáva jednostranne rozum a pamäť žiaka, ale pôsobí tiež na jeho city a vôľu (Perný, 2003).

Napriek neúplnému náčrtu teoretických poznatkov a odporúčaní využívať manipulačné technológie v didaktickej praxi je čitateľovi zrejmá ich opodstatnenosť. Rozsiahlosť problematiky neumožňuje poskytnúť jej úplný prehľad, avšak ukážkou využitia jednej jednoduchej a dostupnej skladačky sa pokúsime poskytnúť čitateľovi vhodnú, netradičnú a overenú *vlastnú sériu úloh* pre bežné použitie v didaktickej praxi.

2.2.1 Skladačka Pentomino

Nemálo hlavolamov a skladačiek má z hľadiska ich výskytu a využitia za sebou dlhú históriu. Autorom opisovaného hlavolamu je údajne Solomon W. Golomb (1953 doktorand na Harvardskej univerzite v Cambridge). Názov je odvodený z gréčtiny a dodnes sa zachováva v populárnom, ale i vo vedeckom názvosloví (Zapletal, 1987). Rôzne modifikácie tejto skladačky nájde čitateľ v literatúre z takzvanej rekreačnej matematiky, niekoľko aplikácií sa už sporadicky vyskytuje v tvorbe nových učebníc matematiky a odporúčaných materiálov, najmä pre mladších žiakov základných škôl.

Pojmom pentomino sa označuje skladačka pozostávajúca z častí, vytvorených vždy z piatich zhodných štvorcov, ktoré majú spoločnú aspoň jednu stranu. Splnením uvedenej podmienky je možné vytvoriť skupinu dvanástich rôznych rovinných útvarov, ktoré vzniknú vhodným „poskladaním“ piatich zhodných štvorcov. Štvorce sa pritom nemajú prekryvať a musia na seba „naväzovať“ výhradne celými stranami (Obr. 1). Dva útvary, ktoré vzniknú jeden z druhého napr. posunutím, otočením, alebo iným zhodnostným zobrazením nie sú považované za rôzne.



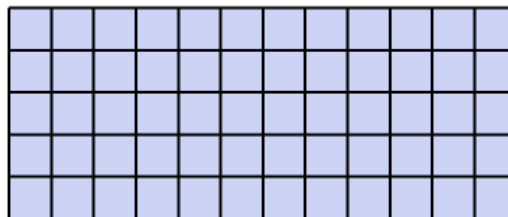
Obr. 1 Skladačka pentomino

Pre využitie skladačky pentomino ponúkame čitateľovi rad originálnych zábavných a užitočných cvičení, ktoré sú hlavným obsahovým prínosom tohto príspevku. Pri vytváraní požadovaných útvarov prostredníctvom skladačky pentomino platia tieto pravidlá:

- jednotlivé útvary zo skladačky sa nemajú prekryvať,
- komponenty skladačky sa umiestňujú do štvorcovej siete, ktorej štvorce sú spravidla zhodné so štvorcami jednotlivých častí skladačky, obmeny dimenzie siete sú možné,
- jednotlivé komponenty skladačky je potrebné celé umiestňovať vo vymedzenom útvare z danej štvorcovej siete, alebo v podobnej štvorcovej sieti.

2.2.2 Odporúčané didaktické postupy pre činnosti so skladačkou pentomino.

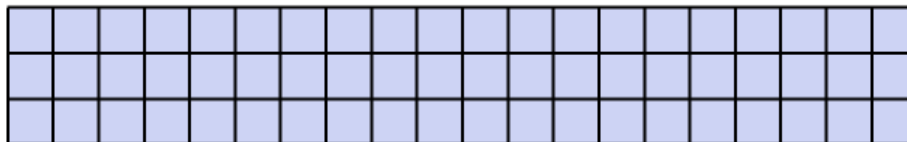
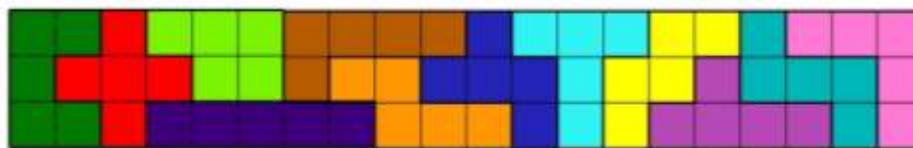
- v počiatočnej fáze poskytneme žiakom skladačku aj s pomôckou, ktorá predstavuje obdĺžnik so štvorcovou sieťou, ktorý je čiastočne vyplnený komponentami skladačky (Obr. 2). Úlohou žiakov je vhodne doplniť do predlohy ďalšie komponenty skladačky.
- žiakom, príp. študentom sa poskytne skladačka pentomino a obdĺžnik so štvorcovou sieťou, ktorej dimenzia je iná než dimenzia štvorcov v skladačke. Úlohou žiakov je zakresliť ďalšie komponenty skladačky do predlohy, ktorá nezodpovedá veľkosti predlohy v predchádzajúcej úlohe.
- žiakom, príp. študentom sa poskytnú všetky časti skladačky a úlohou žiakov je vyplniť obdĺžnikovú sieť. V tomto prípade predpokladáme, že splnenie úlohy bude náročnejšie (viď. obr. 3).

Obr. 2 Obdĺžnik 6×10 Obr. 3 Obdĺžnik 5×12

3 Ukážka netradičných úloh a aktivít

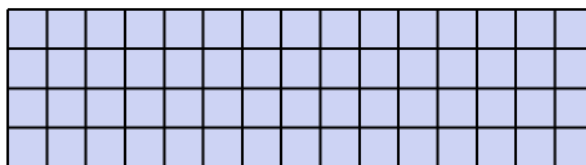
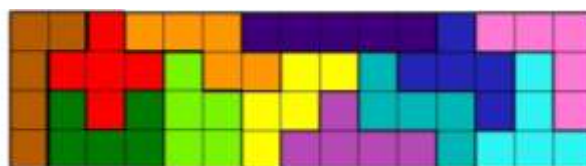
Úloha 1:

- Pokryte dvanástimi pentominovými útvarmi obdĺžnik zložený z 3×20 štvorcových jednotiek (viď obr. 4), tak aby sa žiadne dve pentomina neprekrývali a aby boli pokryté všetky štvorce siete v danom obdĺžniku (viď. obr. 5).

Obr. 4 Štvorcová sieť 3×20 Obr. 5 Obdĺžnik 3×20 vyplnený skladačkou pentomino

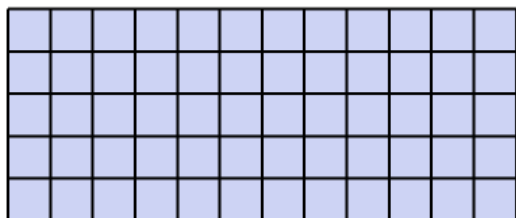
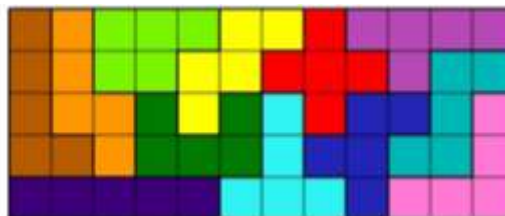
Úloha 2:

- Pokryte dvanástimi pentominovými útvarmi obdĺžnik zložený z 4×15 štvorcových jednotiek (viď obr. 6), tak aby sa žiadne dve pentomina neprekrývali a aby boli pokryté všetky štvorce siete daného obdĺžnika (viď. obr. 7).

Obr. 6 Štvorcová sieť 4×15 Obr. 7 Obdĺžnik 4×15 vyplnený pentominom

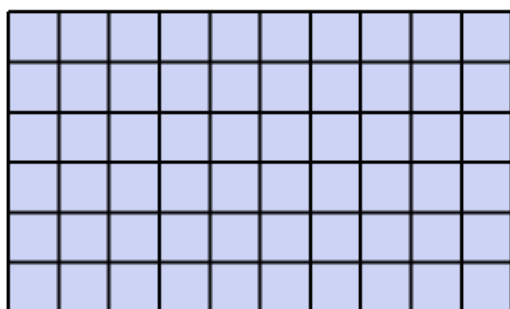
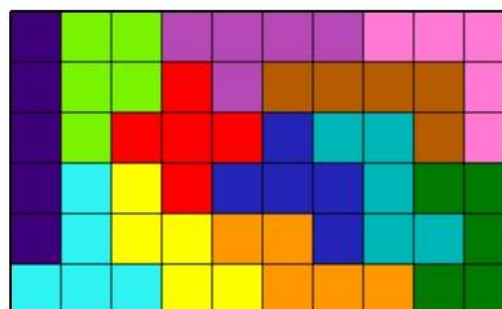
Úloha 3:

- Pokryte dvanástimi pentominovými útvarmi obdĺžnik zložený z 5×12 štvorcových jednotiek (viď obr. 8), tak aby sa žiadne dve pentomina neprekrývali a aby boli pokryté všetky štvorce siete daného obdĺžnika (viď. obr. 9).

Obr. 8 Štvorcová sieť 5×12 Obr. 9 Obdĺžnik 5×12 – riešenie

Úloha 4:

- Pokryte dvanástimi pentominovými útvarmi obdĺžnik zložený z 6×10 štvorcových jednotiek (viď obr. 10), tak aby sa žiadne dve pentomina neprekrývali a aby boli pokryté všetky štvorce siete daného obdĺžnika (viď. obr. 11).

Obr. 10 Štvorcová sieť 6×10 Obr. 11 Obdĺžnik 6×10 – riešenie

Zaujímavý je počet riešení jednotlivých úloh (Zapletal, 1987).

- obdĺžnik 3×20 má 2 rôzne riešenia,
- obdĺžnik 4×15 má 368 rôznych riešení,
- obdĺžnik 5×12 má 1010 rôznych riešení,
- obdĺžnik 6×10 má 2339 rôznych riešení.

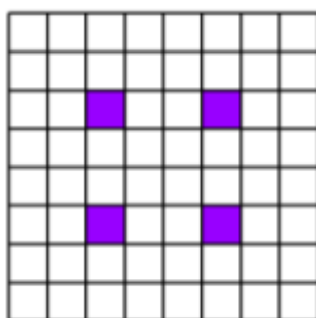
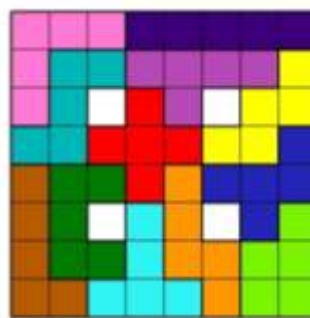
Na základe týchto výsledkov je veľmi dobre vidieť náročnosť jednotlivých úloh.

Skladačka sa dá využiť v rôznych matematických hrách, uvedieme aspoň jednu z nich. Pravidlá hry pre dvojicu hráčov na šachovnici (8×8 štvorcov – viď. obr. 12). Obidvaja súper kladú striedavo na šachovnicu časti pentomina. Vyhráva ten hráč, ktorý položí pentomino na šachovnicu tak, aby súper nemohol na šachovnicu priložiť žiadnu zo zostávajúcich častí pentomina.. Pre túto hru bola objavená stratégia pre začínajúceho hráča, ktorý, ak správne hrá, nemôže prehrať. Je treba pripomenúť, že pri bežnom hraní nie je prakticky možné si túto stratégiu zapamätať a tým hra nestráca na svojej zaujímavosti a príťažlivosti. Hra sa hrá aj v iných variantoch, kde zatiaľ stratégia víťazstva nebola u mnohých ešte objavená. Objavenie optimálnej stratégie môže byť vhodným námetom pre kombinatorické cvičenie náročnejšieho riešiteľa.

Úloha 5:

- Pokryte dvanástimi pentominovými útvarmi šachovnicu 8×8 štvorcov, tak aby sa žiadne dve pentomina neprekrývali a aby boli pokryté všetky voľné štvorce. Je známe,

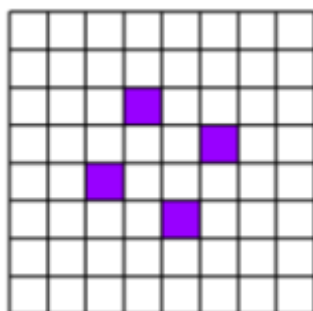
že skladačka pentomino obsahuje spolu 60 štvorcov, preto sa na šachovnici nachádzajú štyri vyplnené štvorce (vid'. obr. 12).

Obr. 12 Šachovnica 8×8 

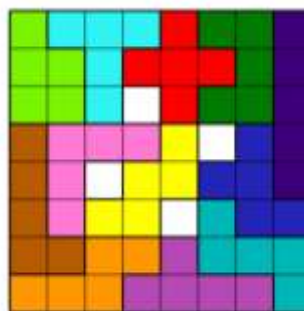
Obr. 13 Vyplnená šachovnica – riešenie

Úloha 6:

- Pokryte dvanástimi pentominovými útvarmi šachovnicu (8×8), tak aby sa žiadne dve pentomina neprekrývali a aby boli pokryté všetky voľné štvorce. Skladačka obsahuje spolu 60 štvorcov, preto sa na šachovnici nachádzajú štyri vyplnené štvorce (vid'. obr. 14). Úloha je obmenou úlohy 5.



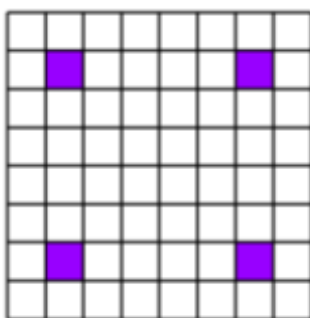
Obr. 14 Šachovnica typu 2



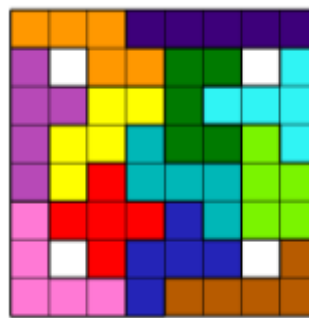
Obr. 15 Šachovnica typu 2

Úloha 7:

- Pokryte dvanástimi pentominovými útvarmi prázdne polia šachovnice (8×8), tak aby sa žiadne dve pentomina neprekrývali a aby boli pokryté všetky voľné štvorce (vid'. obr. 16). Je to ďalšia obmena úlohy 5.



Obr. 16 Šachovnica typu 3

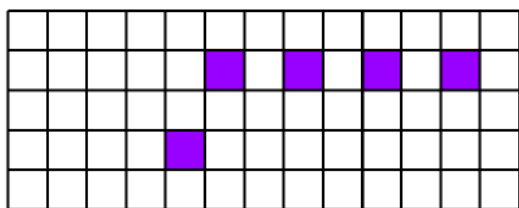


Obr. 17 Vyplnená šachovnica pentominom typu 3

Úloha 8:

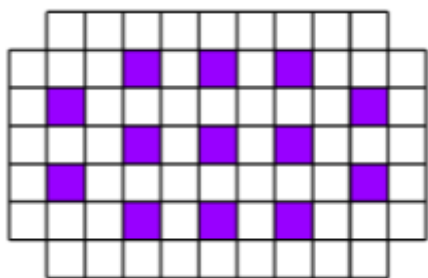
- Pokryte dvanástimi pentominovými útvarmi obdĺžnik 5×13 , tak aby sa žiadne dve pentomina neprekrývali a aby boli pokryté všetky voľné štvorce (vid'. obr. 18). Vieme,

že 5×13 je 65 a my máme k dispozícii len 60 štvorcov, preto je 5 štvorcov vyplnených.

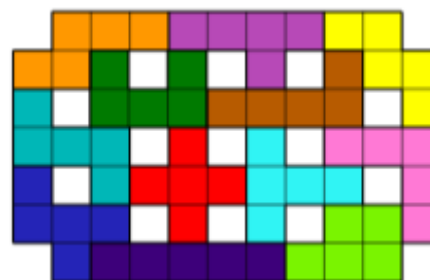
Obr. 18 Obdĺžnik 5×13 Obr. 19 Vyplnený obdĺžnik 5×13

Úloha 9:

- Pokryte dvanástimi pentominovými útvarmi útvar znázornený na obr. 19., aby sa žiadne dve súčasti pentomina neprekrývali a aby boli pokryté všetky voľné štvorce.



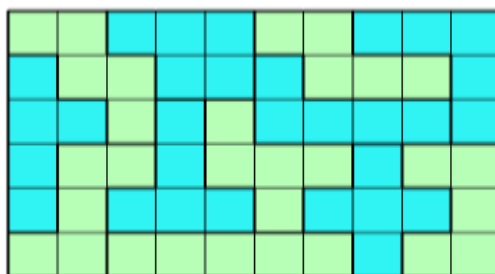
Obr. 19



Obr. 20 – riešenie

Úloha 10:

- Pokryte dvanástimi pentominovými útvarmi obdĺžnik 6×10 (viď obr. 21), tak aby sa žiadne dve pentomina neprekrývali a aby boli pokryté všetky štvorce daného obdĺžnika. Pokrývanie nech splňuje podmienku striedania farieb s výnimkou jednej spoločnej strany jednotkových štvorcov (viď. obr. 21).

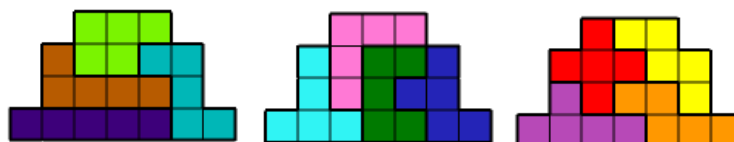
Obr. 21 Vyplnený obdĺžnik 6×10 za splnených podmienok v úlohe.

Úloha 11:

- Rozdeľte doštičky pentomina na tri skupiny a zostav z jednej štvorice dosku ľubovoľného tvaru, na ktorú by sa dal(a) bezo zvyšku položiť aj hociktorá zo zvyšných štvoric. Inými slovami – treba rozdeliť doštičky na tri skupiny tak, aby sa z nich dali zostrojiť tri geometricky zhodné obrazce.



Obr. 22 Jedna zo skupín rovnakých obrazcov z 12 častí pentomina



Obr. 23 Druhá skupina



Obr. 24 Tretia skupina

4 Záver

Vhodným spracovaním uvedených aktivít môžeme primeraným spôsobom pozitívne pôsobiť na rozvoj rovinatej priestorovej predstavivosti s výrazným zastúpením prvkov kombinatorického myslenia. Spracované úlohy môžeme zaradiť do vyučovacích hodín matematiky už aj u žiakov na prvom stupni základnej školy, aj v etape keď nie je priamo preberané geometrické učivo. Žiaci takéto typy úloh radi riešia taktiež vo voľnočasových aktivitách, je to teda vhodný námet pre činnosti v kluboch a krúžkoch. Podobne sa predložené námety dajú využiť pri tvorbe úloh pre rôzne zábavné súťaže a hry s matematickým, ale aj iným zameraním. Z experimentálnej praxe s uvedenými úlohami je známe, že sú pre žiakov zaujímavé, spestrujú vyučovanie a aj motivujú pre zaoberanie sa s matematikou, čím sa dostavuje efekt diskkrétnej formy vyučovania.

Je potrebné, aby sa v príprave budúcich učiteľov matematiky, ale aj učiteľov pre 1. stupeň základných škôl vyskytovali v maximálnej únosnej miere úlohy podobného zamerania, je úlohou ich didaktickej prípravy na prax. Úlohy obohacujú riešiteľa o rôzne vlastnosti geometrických útvarov, vytvárajú didakticky priaznivé situácie pre rozvoj predstavivosti a zároveň pôsobia pozitívne na rozvoj kombinatorického myslenia.

Predložené úlohy sú len ukázkami a návrhmi, ale pomerne obsažná a autorsky originálna zbierka riešených úloh môže byť podnetom pre modifikovanú tvorbu podobných úloh, ktoré vyučovanie matematiky urobia efektívnejším a najmä zaujímavším.

Literatúra

- [1] FRANKE, M.: *Didaktik der Geometrie in der Grundschul. Mathematik – Primar- und Sekundarstufe*. Spektrum: Akademischer Verlag, 2. Auflage 2007, s.338. ISBN 978-3-8274-1511-0.
- [2] HEJNÝ, M. *Teória vyučovania matematiky 2*. SPN, Bratislava, 1990. 560 s. ISBN 80-08-00014-7.
- [3] HEJNÝ, M. – KUŘINA, F.: *Dítě, škola, matematika*. Portál, Praha, 2001, s.187. ISBN 80-7178-581-4. [4]
- [4] KUŘINA, F.: *Problémové vyučování v geometrii*. SPN, Praha, 1976, ISBN 14-532-76.
- [5] KREJČOVÁ, E., VOLFOVÁ M., *Didaktické hry v matematice*. Gaudeamus, Hradec Králové, 2001. 120 s. ISBN 80-7041-423-5.
- [6] PERNÝ, J.: *Geometrické skládanky*. In: *Od činnosti k poznatku*. Západočeská univerzita v Plzni, Srní, 2003, ISBN 80-7082-955-9.
- [7] PŘÍHONSKÁ, J.: *Úvod do kombinatoriky*. Liberec, 2008, ISBN 978-80-7399-456-3.
- [8] ZAPLETAL, M.: *Kniha hlavolamov*. Mladé letá, Bratislava, 1987, 144 s.
- [9] ŽIDEK, O.: *Manipulačná činnosť ako prostriedok pri budovaní geometrických predstáv a poznatkov*. Zborník *Od činnosti k poznatku*, ZUP, Srní, 2003, str. 84 – 86, ISBN 80-7082-955-9.
- [10] ŽIDEK, O.: *Náčrt ukážok z manipulačnej geometrie*. Medzinárodná vedecká konferencia Kolokvium pre učiteľov stredomoravského kraja. Bratislava 2005, <http://www.fedu.uniba.sk/km/home/zidek/clanky/manipulgeo.htm>, 10.11.2010.