# 2 Riešenie sústav lineárnych rovníc

## 2.1 Základné pojmy

**Sústavou *m* lineárnych rovníc o *n* neznámych rozumieme schému:**

$$\begin{aligned} x_1 a_{11} + \ldots + x_n a_{1n} &= c_1 \\ x_1 a_{21} + \ldots + x_n a_{2n} &= c_2 \\ &\vdots \\ x_1 a_{m1} + \ldots + x_n a_{mn} &= c_m \end{aligned}$$

Ku každej sústave môžeme priradiť dve matice:

maticu sústavy $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

rozšírenú maticu sústavy $A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$

Ak označíme $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ a $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$,

potom predchádzajúcu sústavu môžeme napísať v tvare

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix},$$

t.j. $A.X=C$.

Z tohto zápisu vidíme, že násobenie matíc, ktoré bolo definované v podkapitole 1.4, nám umožňuje zapísať sústavu rovníc v maticovom tvare.

## 2.2 Nehomogénne a homogénne sústavy

Ak $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, sústava sa nazýva **homogénna,** ak $C \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, sústava sa nazýva **nehomogénna**.

**Hovoríme, že *n*-tica ($r_1, \ldots, r_n$) je riešením sústavy, ak $AR = C$, kde** $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$.

***Poznámka.***
Z hore uvedených úvah vyplýva, že nejaká $n$-tica je riešením sústavy vtedy a len vtedy, keď je riešením každej rovnice sústavy.
Sústavu nazývame riešiteľnou, ak má aspoň jedno riešenie. V opačnom prípade sa nazýva neriešiteľná.

### 2.3 Gaussova eliminačná metóda, Frobeniova veta

Teraz si opíšeme univerzálnu metódu na riešenie sústav $m$ lineárnych rovníc o $n$ neznámych.

Nech je daná sústava
$$\begin{aligned} x_1a_{11} + \ldots + x_na_{1n} &= c_1 \\ x_1a_{21} + \ldots + x_na_{2n} &= c_2 \\ &\vdots \\ x_1a_{m1} + \ldots + x_na_{mn} &= c_m \end{aligned}.$$

Zostrojíme rozšírenú maticu sústavy $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$

a pomocou ERO upravíme rozšírenú maticu na trojuholníkovú (nie nutne redukovanú trojuholníkovú), čo je vždy možné. Dostaneme tak maticu tvaru

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & \ldots & c_{1,h} & c_{1,h+1} & \ldots & c_{1,n} & d_1 \\ 0 & c_{2,2} & c_{2,3} & \ldots & c_{2,h} & c_{2,h+1} & \ldots & c_{2,n} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{3,3} & \ldots & c_{3,h} & c_{3,h+1} & \ldots & c_{3,n} & d_3 \\ . & & & & & & & & . \\ . & & & & & & & & . \\ . & & & & & & & & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_{h,h} & c_{h,h+1} & \ldots & c_{h,n} & d_h \end{pmatrix}.$$

K takto upravenej matici napíšeme príslušnú sústavu, ktorá je s pôvodnou sústavou ekvivalentná (používali sme ERO), t.j. má tú istú množinu riešení.

$$\begin{aligned} c_{1,1}x_1 + c_{1,2}x_2 + c_{1,3}x_3 + \ldots + c_{1,h}x_h + c_{1,h+1}x_{h+1} + \ldots + c_{1,n}x_n &= d_1 \\ c_{2,2}x_2 + c_{2,3}x_3 + \ldots + c_{2,h}x_h + c_{2,h+1}x_{h+1} + \ldots + c_{2,n}x_n &= d_2 \\ c_{3,3}x_3 + \ldots + c_{3,h}x_h + c_{3,h+1}x_{h+1} + \ldots + c_{3,n}x_n &= d_3 \\ &\vdots \\ c_{h,h}x_h + c_{h,h+1}x_{h+1} + \ldots + c_{h,n}x_n &= d_h \end{aligned}$$

Na vyriešenie takto upravenej sústavy použijeme Frobeniovu vetu a jej dôsledky.

**<u>Veta 2.1.</u> (Frobenius) Sústava nehomogénnych rovníc je riešiteľná vtedy a len vtedy, keď hodnosť matice sústavy sa rovná hodnosti rozšírenej matice sústavy.**

**Dôsledok 1: Ak $h(A) = h(A') = n$ ($n$ je počet neznámych), potom sústava má práve jedno riešenie.**

**Dôsledok 2: Ak $h(A) = h(A') < n$ ($n$ je počet neznámych), potom sústava má nekonečne veľa riešení a $n$-$h$ neznámych možno ľubovoľne zvoliť.**

**Dôsledok 3: Ak $h(A) \neq h(A')$, potom sústava nemá riešenie.**

Postup si teraz ozrejmíme na príkladoch.

***Príklad 2.1.***
Riešte sústavu:

$$\begin{aligned} x + 2y + z - t &= 1 \\ 2x + 3y - z + 2t &= 3 \\ 4x + 7y + z &= 5 \\ 5x + 7y - 4z + 7t &= 10 \end{aligned}$$

Rozšírená matica tejto sústavy má tvar $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$.

Použitím ERO upravíme postupne rozšírenú maticu na trojuholníkovú maticu.
Najskôr k 2. riadku pričítame (-2)-násobok 1. riadku, k 3. riadku pričítame (-4)-násobok 1. riadku a k 4. riadku pričítame (-5)-násobok 1. riadku.

Dostaneme maticu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -9 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.

Potom vynásobíme 2. riadok číslom (-1). Dostaneme maticu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -9 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.

Napokon k 3. riadku pričítame 1-násobok 2. riadku a k 4. riadku pričítame 3-násobok 2. riadku, čím dostaneme maticu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, v ktorej ešte vymeníme posledné dva riadky. Dostaneme tak trojuholníkovú maticu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Sústava zodpovedajúca poslednej matici má tvar:

$$\begin{aligned} x + 2y + z - t &= 1 \\ y + 3z - 4t &= -1 \\ 0 &= 2 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Je zrejmé, že tretej rovnici tejto sústavy nevyhovujú žiadne čísla a sústava nemá riešenie. Povedané v reči matíc: $h(A)=2$, $h(A')=3$ a podľa dôsledku 3 sústava nemá riešenie.

***Príklad 2.2.***

Riešte sústavu:

$$\begin{aligned} x - 2y + 4z + t &= -6 \\ 2x + 3y - z + 2t &= 13 \\ 3x + y + 3z + 3t &= 7 \\ x + 5y - 5z + t &= 19 \end{aligned}$$

Podobne ako v predchádzajúcom príklade napíšeme príslušnú rozšírenú maticu sústavy

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 13 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & -5 & 1 & 19 \end{pmatrix}$ a pomocou ERO ju upravíme na trojuholníkovú maticu.

Najskôr k 2. riadku pričítame (-2)-násobok 1. riadku, k 3. riadku pričítame (-3)-násobok 1. riadku a k 4. riadku pričítame (-1)-násobok 1. riadku.

Dostaneme tvar $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & 7 & -9 & 0 & 25 \\ 0 & 7 & -9 & 0 & 25 \\ 0 & 7 & -9 & 0 & 25 \end{pmatrix}$.

Následne k 3. riadku pričítame (-1)-násobok 2. riadku a taktiež k 4. riadku pričítame (-1)-násobok 2. riadku. Dostaneme trojuholníkovú maticu $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & -6 \\ 0 & 7 & -9 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

K takto upravenej matici napíšeme príslušnú sústavu:

$$\begin{aligned} x - 2y + 4z + t &= -6 \\ 7y - 9z + 0t &= 25 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Zrejme za posledné dve neznáme môžeme zvoliť ľubovoľné reálne čísla a zvyšné neznáme dopočítame. Pretože sme mohli voliť ľubovoľné čísla, sústava má nekonečne veľa riešení. Postupujeme tak, že za $t$ a $z$ si zvolíme ľubovoľné parametre $\boldsymbol{t = p}$, $\boldsymbol{z = q}$, $p, q \in R$, tieto dosadíme postupne do predchádzajúcich rovníc a pomocou týchto parametrov vypočítame zvyšné premenné.

$$7y - 9z = 25 \Rightarrow y = \frac{25 + 9z}{7} \Rightarrow y = \frac{25 + 9q}{7}$$

$$x = -6 + 2y - 4z - t \Rightarrow x = -6 + \frac{50 + 18q}{7} - 4q - p \Rightarrow$$

$$x = \frac{-42 + 50 + 18q - 28q - 7p}{7} \Rightarrow x = \frac{8 - 10q - 7p}{7}$$

Napokon zapíšeme všeobecné riešenie v tvare $S=\left\{\left(\frac{8-10q-7p}{7},\frac{25+9q}{7},q,p\right),p,q\in R\right\}$.

Táto situácia v reči matíc zodpovedá dôsledku 2 za vetou 2.1.

Ak do všeobecného riešenia dosadíme za $p$, $q$ konkrétne (ľubovoľné) čísla, napríklad $q = 1$, $p = 0$, dostaneme **partikulárne riešenie** $\left(\frac{8-10\cdot 1-7\cdot 0}{7},\frac{25+9\cdot 1}{7},1,0\right)=\left(\frac{-2}{7},\frac{34}{7},1,0\right)$.

***Príklad 2.3.***

Riešte sústavu:

$x - 2y + 4z = 0$
$2x + 3y + z = 7$
$3x + y + 3z = 7$

Podobne ako v predchádzajúcom príklade napíšeme príslušnú rozšírenú maticu sústavy $\begin{pmatrix}1 & -2 & 4 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 7\\ 3 & 1 & 3 & 7\end{pmatrix}$ a pomocou ERO ju upravíme na trojuholníkovú maticu.

Najskôr k 2. riadku pričítame (-2)-násobok 1. riadku a k 3. riadku pričítame (-3)-násobok 1. riadku. Dostaneme tvar $\begin{pmatrix}1 & -2 & 4 & 0\\ 0 & 7 & -7 & 7\\ 0 & 7 & -9 & 7\end{pmatrix}$. Následne k 3. riadku pričítame (-1)-násobok 2. riadku. Dostaneme trojuholníkovú maticu $\begin{pmatrix}1 & -2 & 4 & 0\\ 0 & 7 & -7 & 7\\ 0 & 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

K takto upravenej matici napíšeme príslušnú sústavu:

$x - 2y + 4z = 0$
$7y - 7z = 7$
$-2z = 0$

Z poslednej rovnice vyplýva, že $z = 0$.
Z druhej rovnice dostaneme $7y – 7.0 = 7$, teda $7y = 7$, t.j. $y = 1$.
Z prvej rovnice $x – 2.1 + 4.0 = 0$, teda $x = 2$.
Napokon zapíšeme všeobecné riešenie v tvare $S=\{(2,1,0)\}$.
Táto situácia v reči matíc zodpovedá dôsledku 1 za vetou 2.1.

## 2.4 Riešenie homogénnych sústav

V predchádzajúcej časti sme ukázali, ako riešime nehomogénne sústavy lineárnych roníc eliminačnou metódou. Teraz uvedieme určité špecifiká tejto metódy pri riešení homogénnych sústav.

Podľa definície, homogénna sústava lineárnych rovníc má tvar:
$$\begin{aligned} x_1a_{11} + \ldots + x_na_{1n} &= 0 \\ x_1a_{21} + \ldots + x_na_{2n} &= 0 \\ &\vdots \\ x_1a_{m1} + \ldots + x_na_{mn} &= 0 \end{aligned}$$

Pretože rozšírená matica sústavy sa od matice sústavy líši iba o stĺpec pozostávajúci z núl, v takejto sústave vždy platí $h(A)=h(A')$. To znamená, že takáto sústava je vždy riešiteľná. Môže mať práve jedno riešenie alebo nekonečne veľa riešení, čo zistíme použitím Frobeniovej vety a jej dôsledkov.

***Poznámka:***
Riešením takejto sústavy je zrejme n-tica (0,0,...,0), čo môžeme overiť dosadením. Toto riešenie nazývame triviálne riešenie homogénnej sústavy.
Ak má sústava iba jedno riešenie, tak je to práve triviálne riešenie.
O netriviálnych riešeniach nám hovorí nasledujúca veta.

**Veta 2.2. Sústava homogénnych lineárnych rovníc má netriviálne riešenie práve vtedy, ak $h(A) < n$.**

***Príklad 2.4.***
Riešte sústavu:
$$\begin{aligned} x - 2y + 4z + t &= 0 \\ 2x + 3y - z + 2t &= 0 \\ 3x + y + 3z + 3t &= 0 \\ x + 5y - 5z + t &= 0 \end{aligned}$$

Rozšírená matica sústavy má tvar $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Postupne ju upravíme na trojuholníkovú maticu. Najskôr k 2. riadku pričítame (-2)-násobok 1. riadku, k 3. riadku pričítame (-3)-násobok 1. riadku a k 4. riadku pričítame (-1)-násobok 1. riadku.

Dostaneme tvar $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Následne k 3. riadku pričítame (-1)-násobok 2. riadku a taktiež k 4. riadku pričítame (-1)-násobok 2. riadku. Dostaneme trojuholníkovú maticu $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

K takto upravenej matici napíšeme príslušnú sústavu:
$$\begin{aligned} x - 2y + 4z + t &= 0 \\ 7y - 9z + 0t &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Tak ako v príklade 2.2., za posledné dve neznáme môžeme zvoliť ľubovoľné reálne čísla a zvyšné neznáme dopočítame. Pretože sme mohli voliť ľubovoľné čísla, sústava má nekonečne veľa riešení. Za $t$ a $z$ si zvolíme ľubovoľné parametre $\boldsymbol{t = p}$, $\boldsymbol{z = q}$, $p, q \in R$ a pomocou týchto parametrov vypočítame

$$7y - 9z = 0 \Rightarrow y = \frac{9z}{7} \Rightarrow y = \frac{9q}{7}$$

$$x = 2y - 4z - t \Rightarrow x = \frac{18q}{7} - 4q - p \Rightarrow x = \frac{18q - 28q - 7p}{7} \Rightarrow x = \frac{-10q - 7p}{7}$$

Všeobecné riešenie nakoniec zapíšeme v tvare $S = \left\{ \left( \frac{-10q - 7p}{7}, \frac{9q}{7}, q, p \right), p, q \in R \right\}$.

***Poznámka:***
Ak za $p$, $q$ dosadíme do všeobecného riešenia 0, dostávame triviálne riešenie.

### 2.5 Maticový zápis sústavy, riešenie sústavy pomocou inverznej matice

Nech sústava lineárnych rovníc je daná v maticovom tvare $AX=C$ (tak ako sme to uviedli v podkapitole 2.1). Nech k matici $A$ existuje inverzná matica $A^{-1}$ (teda $A$ je štvorcová a regulárna). Ak rovnicu $AX=C$ vynásobíme zľava inverznou maticou $A^{-1}$ (pozor na to, že musíme násobiť zľava, lebo pre násobenie matíc neplatí komutatívny zákon), dostávame:

$$\begin{aligned} A.X &= C \\ A^{-1}(A.X) &= A^{-1}.C \\ (A^{-1}.A).X &= A^{-1}.C \\ I_n.X &= A^{-1}.C \\ X &= A^{-1}.C \end{aligned}$$

Teda $X=A^{-1}C$ je riešením sústavy. Pri predchádzajúcej úprave sme použili asociatívny zákon pre násobenie matíc, definíciu inverznej matice a skutočnosť, že $I_n$ je neutrálny prvok pre násobenie matíc.

***Poznámka:***
Pozorný čitateľ si iste všimol fakt, že touto metódou môžeme riešiť iba sústavy, kde počet rovníc je rovný počtu neznámych a naviac matica sústavy musí byť regulárna. Ináč by totiž neexistovala inverzná matica. Gaussova eliminačná metóda takéto obmedzenia nemá a je všeobecne použiteľná na riešenie sústav lineárnych rovníc.

Príklad 2.5.
Vyriešte sústavu z príkladu 2.3 pomocou inverznej matice.

Sústava má tvar:

$$\begin{aligned} x - 2y + 4z &= 0 \\ 2x + 3y + z &= 7 \\ 3x + y + 3z &= 7 \end{aligned}$$

Matica sústavy $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ a $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Najskôr vypočítame inverznú maticu k matici $A$.

Urobíme to tak, že maticu $A$ rozšírime o jednotkovú maticu a upravíme ju na redukovanú trojuholníkovú maticu. Pri tomto postupe nám v 4.-6. stĺpci vznikne inverzná matica k matici $A$.

Maticu $A$ rozšírime o jednotkovú maticu: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Pričítame k 2. riadku (-2)-násobok 1. riadku a k 3. riadku pričítame (-3)-násobok 1. riadku:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Teraz pričítame k 3. riadku (-1)-násobok 2. riadku: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

Posledný riadok vynásobíme číslom (-2): $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right)$

Pričítame k 2. riadku 7-násobok 3. riadku: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} & \frac{-7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right)$

Druhý riadok vynásobíme číslom $\frac{1}{7}$: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{14} & \frac{9}{14} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right)$

Pričítame k 1. riadku 2-násobok 2. riadku: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & \frac{20}{14} & \frac{18}{14} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{14} & \frac{9}{14} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right)$

Pričítame k 1. riadku (-4)-násobok 3. riadku: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-8}{14} & \frac{-10}{14} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{14} & \frac{9}{14} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right)$

Inverzná matica $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-8}{14} & \frac{-10}{14} & 1 \\ \frac{3}{14} & \frac{9}{14} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$.

Na výpočet riešenia použijeme vzťah $X = A^{-1}.C$.

$$A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} \frac{-8}{14} & \frac{-10}{14} & 1 \\ \frac{3}{14} & \frac{9}{14} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = X$$

Napokon zapíšeme obor pravdivosti v tvare $P = \{(2,1,0)\}$.

## 2.6 Úlohy

Zostavte matice zodpovedajúce daným sústavám rovníc a pokúste sa ich upraviť pomocou ERO na redukovanú trojuholníkovú maticu.

1. $\begin{aligned} x + y &= 4 \\ x + 2y &= 7 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x + 2y + z &= 11 \\ x + 3z &= 6 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} a + b + c + d &= 2 \\ 2a + 3b + d &= 5 \\ b + 3c + d &= 1 \\ a - 5b + c + 2d &= -4 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} y + 3z &= 3 \\ 2x + 10y + z &= 5 \\ x + 3y &= 2 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 5 \\ 2x + 10y + z &= 5 \\ 3x + 12y + 4z &= 2 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} x + 2y + z &= 5 \\ -2x + 2y + 3z &= 5 \\ 6y + 5z &= 15 \end{aligned}$

Riešenie:

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&2\\2&3&0&1&5\\0&1&3&1&1\\1&-5&1&2&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&2\\0&1&-2&-1&1\\0&1&3&1&1\\0&-6&0&1&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&3&2&1\\0&1&-2&-1&1\\0&0&5&2&0\\0&0&-12&-5&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&3&2&1\\0&1&-2&-1&1\\0&0&1&0,4&0\\0&0&-12&-5&0\end{pmatrix}\sim$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0,8&1\\0&1&0&-0,2&1\\0&0&1&0,4&0\\0&0&0&-0,2&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0,8&1\\0&1&0&-0,2&1\\0&0&1&0,4&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix}0&1&3&3\\2&10&1&5\\1&3&0&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&0&2\\2&10&1&5\\0&1&3&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&0&2\\0&4&1&1\\0&1&3&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&0&2\\0&1&3&3\\0&4&1&1\end{pmatrix}\sim$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-9&-7\\0&1&3&3\\0&0&-11&-11\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-9&-7\\0&1&3&3\\0&0&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{pmatrix}1&2&3&5\\2&10&1&5\\3&12&4&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&5\\0&6&-5&-5\\0&6&-5&-13\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&5\\0&1&\frac{-5}{6}&\frac{-5}{6}\\0&6&-5&-13\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&\frac{14}{3}&\frac{20}{3}\\0&1&\frac{-5}{6}&\frac{-5}{6}\\0&0&0&-8\end{pmatrix}\sim$$

$$\begin{pmatrix}1&0&\frac{14}{3}&\frac{20}{3}\\0&1&\frac{-5}{6}&\frac{-5}{6}\\0&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&\frac{14}{3}&0\\0&1&\frac{-5}{6}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

6.

$$\begin{pmatrix}1&2&1&5\\-2&2&3&5\\0&6&5&15\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&5\\0&6&5&15\\0&6&5&15\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&5\\0&1&\frac{5}{6}&\frac{5}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&\frac{-2}{3}&0\\0&1&\frac{5}{6}&\frac{5}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Riešte sústavy rovníc:

7. $\begin{aligned}a+2b+3c&=14\\2a\qquad-3c&=-7\\2a+5b-\ c&=9\end{aligned}$

8. $\begin{aligned}a+2b\ +3c&=14\\2a\qquad-3c&=-7\\a-2b-6c&=-21\end{aligned}$

9. $\begin{aligned}a+2b+\ c&=14\\2a\qquad-3c&=-7\\-4b-5c&=-11\end{aligned}$

Riešenie:

7.

$$\begin{pmatrix}1&2&3&14\\2&0&-3&-7\\2&5&-1&9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&14\\0&-4&-9&-35\\0&1&-7&-19\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&14\\0&1&-7&-19\\0&-4&-9&-35\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&17&-52\\0&1&-7&-19\\0&0&-37&-111\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&17&-52\\0&1&-7&-19\\0&0&1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{pmatrix}\qquad K=\{[1;2;3]\}$$

8.

$$\begin{pmatrix}1&2&3&14\\2&0&-3&-7\\1&-2&-6&-21\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&14\\0&4&9&35\\0&4&9&35\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&14\\0&1&\frac{9}{4}&\frac{35}{4}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&\frac{-3}{2}&\frac{-7}{2}\\0&1&\frac{9}{4}&\frac{35}{4}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$a-\frac{3}{2}c=-\frac{7}{2}\Rightarrow a=-\frac{7}{2}-\frac{3}{2}c$$

$$b+\frac{9}{4}c=\frac{35}{4}\Rightarrow b=\frac{35}{4}-\frac{9}{4}c$$

$$K=\left\{\left[-\frac{7}{2}-\frac{3}{2}c;\frac{35}{4}-\frac{9}{4}c;c\right];c\in R\right\}$$

9.

$$\begin{pmatrix}1&2&1&14\\2&0&-3&-7\\0&-4&-5&-11\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&14\\0&-4&-5&-35\\0&-4&-5&-11\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&14\\0&-4&-5&-35\\0&0&0&24\end{pmatrix}\qquad K=\{\ \}$$

Pri riešení sústavy 4 lineárnych rovníc s neznámymi $x,y,z,t$ sme postupovali úpravou na redukovanú trojuholníkovú maticu. Zapíšte množinu riešení. Ak je množina riešení nekonečná, uveďte navyše aspoň dve konkrétne riešenia.

10. $\begin{pmatrix}1&0&0&0&3\\0&1&0&0&-5\\0&0&1&0&\frac{2}{3}\\0&0&0&1&\frac{-7}{8}\end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix}1&0&0&0&3\\0&1&0&0&-5\\0&0&1&0&\frac{2}{3}\\0&0&0&0&\frac{-7}{8}\end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix}1&0&0&0&3\\0&1&0&0&-5\\0&0&1&0&\frac{2}{3}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix}1&0&0&-2&3\\0&1&0&\frac{1}{2}&-5\\0&0&1&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix}1&4&0&0&3\\0&0&0&0&-5\\0&0&1&0&\frac{2}{3}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix}1&4&0&0&3\\0&0&1&0&-5\\0&0&0&0&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Riešenie:

10.

$$x=3 \quad y=-5 \quad z=\frac{2}{3} \quad t=\frac{-7}{8}$$

$$K=\left\{\left[3;-5;\frac{2}{3};-\frac{7}{8}\right]\right\}$$

11.

$$x=3 \quad y=-5 \quad z=\frac{2}{3} \quad 0=\frac{-7}{8}$$

$K=\{\}$

12.

$$x=3 \quad y=-5 \quad z=\frac{2}{3} \quad 0=0$$

$$K=\left\{\left[3;-5;\frac{2}{3};t\right];t\in R\right\}$$

konkr. riešenia: $\left[3;-5;\frac{2}{3};1\right]$ $\left[3;-5;\frac{2}{3};2\right]$

13.

$$x-2t=3 \quad y+\frac{1}{2}t=-5 \quad z+\frac{2}{3}t=\frac{2}{3} \quad 0=0$$

$$K=\left\{\left[3+2t;-5-\frac{1}{2}t;\frac{2}{3}-\frac{2}{3}t,t\right];t\in R\right\}$$

konkr. riešenia: $\left[3;-5;\frac{2}{3};0\right]$ $\left[5;-\frac{11}{2};0;1\right]$

14.

$$x+4y=3 \quad 0=-5 \quad z=\frac{2}{3} \quad 0=0$$

$K=\{\ \}$

15.

$$x+4y=3 \quad z=-5 \quad 0=3 \quad 0=0$$

$K=\{\ \}$

16.

$$x+4y=3 \quad t=-5 \quad 0=0 \quad 0=0$$

$$K=\{[3-4y;y;z;-5];y,z\in R\}$$

konkr. riešenia: $[3;0;0;-5]$ $[-1;1;1;-5]$

17.

$$x+7y=-\frac{3}{2}$$
$$0=0$$
$$0=0$$
$$0=0$$

$K=\left\{\left[-\frac{3}{2}-7y,y,z,t\right];y,z,t\in R\right\}$ konkr. riešenia: $\left[-\frac{3}{2};0;0;0\right]$ $\left[-\frac{3}{2};0;1;1\right]$

Riešte sústavy rovníc:

18. $a+2b+3c+d=14$
$a-3c+d=-2$

19. $a+b+c+d=4$
$a-3c+d=-1$
$2a+3d+c+b=7$

Riešenie:

18.

$$\begin{pmatrix}1&2&3&1&14\\1&0&-3&1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&1&14\\0&-2&-6&0&-16\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-3&1&-2\\0&1&3&0&8\end{pmatrix}$$

$K=\left\{\left[-2+3c-d;8-3c;c;d\right];c,d\in R\right\}$ konkr. riešenia: $\left[-2;8;0;0\right]$ $\left[0;5;1;1\right]$

19.

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&4\\1&0&-3&1&-1\\2&1&1&3&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&4\\0&-1&-4&0&-5\\0&-1&-1&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&4\\0&1&4&0&5\\0&0&3&1&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-3&1&-1\\0&1&4&0&5\\0&0&1&\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&2&3\\0&1&0&\frac{-4}{3}&\frac{-1}{3}\\0&0&1&\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

$$K=\left\{\left[3-2d;-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}d;\frac{4}{3}-\frac{1}{3}d;d\right];d\in R\right\}$$

konkr. riešenia: $\left[3;-\frac{1}{3};\frac{4}{3};0\right]$ $\left[1;1;1;1\right]$

Vytvorte sústavy s danými množinami riešení:

20. $K=\left\{\left[7,3,2,4\right]\in R^4\right\}$

21. $K=\left\{\left[2a,a,3\right]\in R^3:a\in R\right\}$

22. $K=\left\{\left[2,3+t,t\right]\in R^3:t\in R\right\}$

Riešenie:

20.
$a=7$ $b=3$
$c=2$ $d=4$

21.
$x=2y$
$z=3$

22.
$x=2$
$y=3+z$