

ANALÝZA ÚROVNE MATEMATICKEJ GRAMOTNOSTI ŠTUDENTOV PREDŠKOLSKEJ A ELEMENTÁRNEJ PEDAGOGIKY – OBLASŤ PRIESTOROVÁ PREDSTAVIVOSŤ

Kristína Sotáková

Katedra matematiky a informatiky, Pedagogická fakulta, Trnavská univerzita
Priemyselná 4, P. O. Box 9, 918 43 Trnava, SR
e-mail: ksotakov@truni.sk

Abstract. One of the signs of goodspace imagination is the ability to visualize the 3D object according to its 2D projection. In this paper we have focused on this ability of imagination. We have studied student's solutions through methods of qualitative and quantitative analysis. We have analyzed student's task's solutions realized within the checking of students' entrance mathematical literacy at three faculties of education in Slovakia.

Key words: space imagination, test of mathematical literacy

1. Úvod

V školskom roku 2008-2009 bola študentom pedagogických fakúlt odboru Predškolská a elementárna pedagogika v Prešove, Banskej Bystrici a Trnave v rámci výskumu matematickej gramotnosti, zadaná aj úloha na priestorovú predstavivosť. S týmto druhom slovných úloh sa študenti počas svojho doterajšieho štúdia nestretávali často. Aj to bol jeden z dôvodov, prečo tento test nedopadol najlepšie.

D. Jirotková charakterizuje priestorovú predstavivosť (pozri [3]) ako intelektovú schopnosť- zručnosť vybavovať si a/ skôr videné – vnímané objekty v trojrozmernom priestore a vybaviť si ich vlastnosti, polohu a priestorové vzťahy; b/ skôr alebo v danom momente videné a vnímané objekty v inej vzájomnej polohe, než ako boli alebo sú skutočné vnímané; c/ objekt priestoru na základe jeho rovinného obrazu; d/ neexistujúci reálny objekt v trojrozmernom priestore na základe jeho slovného opisu. Študenti boli testovaní v jednej zložke priestorovej predstavivosti - a to v schopnosti vidieť objekt priestoru na základe jeho rovinného obrazu.

V článku uvažujeme o stratégiách riešenia, ktoré študenti použili z hľadiska rôznych úrovní porozumenia podľa štúdie OECD PISA (pozri [1]). Tiež štatisticky vyhodnocujeme výsledky a na základe vyskytujúcich sa chýb vyvodzujeme závery zaujímavé z hľadiska didaktického prístupu .

Úloha, ktorú študenti riešili, znela:

Samko má samolepky tvaru štvorca so stranou 3 cm. Na obrázkoch A, B (obr. č. 1) vidíte stavbičky z kociek s dĺžkou hrany 3 cm, ktoré si postavil.

Otázka 1

Koľko samolepiek použil, ak oblepil všetky steny stavbičky na obrázku A? (1b)

Otázka 2

Koľko samolepiek použil, ak oblepil všetky steny „deravej“ stavbičky na obrázku B (aj zvnútra)? (1b)



Obr. č. 1

Otázka 3

Koľko samolepiek použil, ak oblepil všetky steny stavbičky, ktorú postavil z dvoch „deravých“ kociek (ako na obrázku B), položených presne na seba s otvorom dopredu? (2b)

Otázka 4

Koľko samolepiek použil, ak oblepil všetky steny stavbičky zloženej z 10 „deravých“ kociek (ako na obrázku B), položených presne na seba s otvorom dopredu? (2b)

2. Riešenie a kvalitatívna analýza zadanej úlohy

Predpoklad pre úspešné vyriešenie úlohy bol postavený na troch úrovniach. Z hľadiska skúmaných kompetencií rozlišujeme (pozri [2]): 1/ reprodukčnú úroveň (otázka č.1) 2/ úroveň prepojenia (otázka č. 2 a 3) a 3/ úroveň reflexie (otázka č. 4).

2.1 Reprodukčná úroveň

Reprodukčná úroveň v sebe zahŕňala samotnú formuláciu a porozumenie textu slovnej úlohy študentom. V našom prípade išlo to, aby si študent uvedomil, že dĺžka hrany malej kocky sa zhoduje s dĺžkou strany samolepky, ktorou mala byť oblepená. Z uvedeného vyplýva, že na výpočet samolepiek potrebných na oblepenie veľkej kocky na obr. A potrebujeme vynásobiť 9 kocôčok jednej steny kocky so šiestimi stenami veľkej kocky.

Niektorí študenti nevedeli vyselektovať podstatný údaj zo zadania. Pridŕžajúc sa obrázku, ktorý mal slúžiť iba ako náčrt, mylne usúdili, že 3cm je rozmer hrany celej kocky a nie rozmer jednej kocôčky, z ktorých je stavba postavená. Sémantika výrazu v zadani, ktorý znel „...stavbičky z kociek s dĺžkou hrany 3 cm...“ potvrdila ich mylný úsudok, takže počítali s jednou samolepkou na jednu celú stenu veľkej kocky. Z toho usúdili, že na jednu veľkú kocku potrebujú len 6 samolepiek. Chybná reprodukcia zadania bola príčinou ich zlyhania aj vo zvyšných troch úlohách, kedy sa ich výpočet komplikoval z dôvodu pridania otvoru v kocke. V mylnej úvahe ich nezastavili ani komplikované a nejednoznačné riešenia, ktoré z toho vyplynuli.

Zaujímavé (až humorné) interpretácie textu zadania sa našli u niekoľkých študentov, ktorí výraz „...všetky steny stavbičky na obrázku...“ zobrali doslovne a počítali len steny, ktoré je vidieť na obrázku – teda pre nich kocka mala len tri steny. V lepšom prípade sa niektorí študenti pomýlili v tom, že do svojho výpočtu nezaradili len tú stenu, ktorá sa dotýka podložky a ktorú preto netreba (podľa nich) oblepiť.

Ďalším zdrojom nepochopenia a teda aj nesprávnej interpretácie bol výraz v druhej otázke, kde autor chcel zdôrazniť, že treba počítat samolepky aj pre otvor, ktorý v stavbičke vznikol, preto zadanie znelo: „...oblepiť všetky steny „deravej“ stavbičky na obrázku B (aj

zvnútra)...“ Pochopiť slovo „zvnútra“ robilo problém viacerým študentom. Niektorí ho interpretovali tak, že samolepky treba nalepiť na všetkých 6 stien každej kocôčky.

Iní študenti nepredpokladali, že v zadaní 3.a 4. úlohy je potrebné počítať aj so samolepkami pre otvor, lebo to nebolo explicitne vyjadrené. A preto v týchto úlohách uvádzali dva výsledky – počítali so stavbou kociek, ktoré mali byť oblepené aj zvnútra otvoru a zároveň aj bez vnútorného otvoru.

Nedostatočné čítanie s porozumením sa prejavilo u študenta, ktorý zmenil zadanie v štvrtej úlohe, keď namiesto desiatich kociek položených „...presne na seba s otvorom dopredu...“ poukladal kocky s otvorom dole.

2.2 Úroveň prepojenia

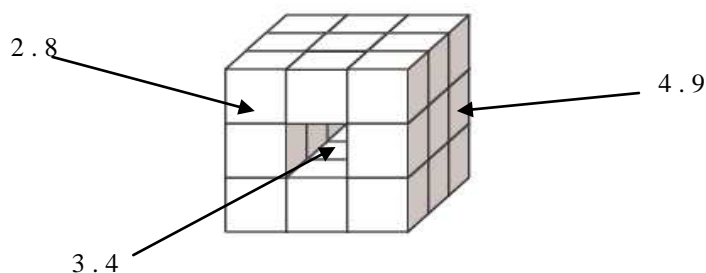
Na úrovni prepojenia sa od študenta očakávalo, že využije poznatky, ktoré získal v doterajších výpočtoch, k ďalším riešeniam. Druhá otázka našej úlohy o kockách sa týkala počtu samolepiek kocky, v ktorej ubudli tri kocôčky, následkom čoho vznikol otvor v strede. Počet samolepiek v kocke bez otvoru bol 54 kusov. Bolo potrebné odčítať dve samolepky zo vzniknutého otvoru (jednu z prednej a jednu zo zadnej steny kocky) a pripočítať samolepky znútra otvoru. Študenti mali pri výpočte využiť výsledok z 1.úlohy a upraviť ho vzhľadom na zmeny v stavbe kocky. Teda celkový výpočet bol:

$$54 - 2 + (3 \cdot 4) = 64.$$

Mnohí študenti, hoci druhú úlohu vyriešili správne, nenadobudli predpokladanú úroveň prepojenia poznatkov a nevyužili výsledok z predošlej úlohy. Prístupovali k druhej otázke, akoby predtým prvú otázku neriešili. Nepostupovali pomocou vyššie uvedeného postupu, ale postupne sčítavali samolepky jednotlivých stien kocky – štyroch plných, dvoch stien s otvorom a vnútorných stien otvoru (pozri obr. č. 2) a svoj výpočet zapísali takto:

$$(4 \cdot 9) + (2 \cdot 8) + (3 \cdot 4) = 64.$$

Ich výpočet bol síce zdĺhavejší, ale správny.



Obr. č.2

Podobné znaky úrovne prepojenia niesla v sebe tretia otázka o dvoch na sebe položených kockách s otvorom. Najjednoduchšie riešenie bolo využiť výsledok z riešenia 2.otázky, t.j. počet samolepiek na jednej kocke s otvorom vynásobiť dvoma a odčítať „dotykové“ plochy daných dvoch kociek s otvorom, aby boli všetky steny oblepené samolepkami. Výpočet vyzeral nasledovne:

$$64 \cdot 2 - 9 \cdot 2 = 110$$

Viacerí študenti využili práve tento postup. Chyby, ktoré sa vyskytli v 3. otázke, spočívali v tom, že študenti zabudli odčítať jednu alebo obidve dotykové plochy kociek. Mnohí študenti použili selektívny výpočet, aký sme uviedli aj pri otázke č. 2. Postupne sčítavali všetky steny, namiesto toho, aby použili výsledok z predošlej úlohy. Ich myšlienkové pochody sa odrazili vo výpočte, ktorý vyzeral takto:

$$6 \cdot 9 + 4 \cdot 8 + 2 \cdot 12 = 110.$$

2.3 Úroveň reflexie

Na úrovni reflexie mali študenti vedieť zovšeobecniť výpočty o jednej kocke s otvorom (prípadne dvoch takých kociek) a aplikovať ich na výpočet týkajúci sa desiatich kociek s otvorom. Pri zovšeobecňovaní výpočtu bolo treba využiť výsledky z 2. otázky o jednej kocke s otvorom, t.j. výsledok z riešenia 2. otázky vynásobiť 10-timi a odčítať príslušný počet „dotýkajúcich sa“ plôch:

$$10 \cdot 64 - 9 \cdot 18 = 478$$

Hlavný problém tejto úrovne spočíval v zisťovaní počtu dotýkajúcich sa plôch. Kociek bolo desať, medzi každými dvoma (okrem prvej a poslednej) boli dve dotykové plochy po 9 kociek, ktoré bolo treba odčítať. Problém znel: Koľko takých dvojíc treba odčítať? Odpoveď študentov bola rôzna – číslo sa pohybovalo od 8 do 10. Na riešenie tohto problému bolo potrebné kombinatorické myslenie, ktoré demonštrujeme na nasledujúcom príklade: „Desať ľudí sedí v rade pri stole, každý si štrngne so svojimi dvoma susedmi. Koľko takých štrngnutí zaznie spolu?“ V našom teste si študenti obrázok vo viacerých prípadoch radšej načrtli a manuálne spočítali počet dotykových plôch. U iných, ktorí nevyužili náčrtok, bolo vidieť tzv. „počítanie na prstoch“ – na papier si značili čiarky, aby sa nepomýlili. Celkový výpočet bol:

$$10 \cdot 64 - 9 \cdot 18 = 478$$

Našla sa aj tzv. „kombinovaná metóda“, keď študent už nepočítal počet dotykových plôch po jednom, ale selektoval výpočet samolepiek, ktorý sa týkal vnútorných kociek od výpočtu okrajových kociek:

$$8 \cdot 64 - 8 \cdot (2 \cdot 9) + 110 = 478$$

V tomto prípade môžeme povedať, že došlo k určitej reflexii.

Ďalší zaujímavý pokus o zovšeobecnenie predviedol študent, ktorý využil výsledok z 3. otázky o dvoch kockách s otvorom, keď vynásobil piatimi počet samolepiek na dvoch spojených kockách s otvorom a odčítal 4 dvojice „dotykových plôch“. Avšak počet tých dvojíc zistil opäť len pomocou nákresu, čo naznačuje deficit priestorovej predstavivosti.

Originálny nápad mal študent, ktorý hľadal funkčnú závislosť medzi počtom samolepiek potrebných na stavbu a počtom kociek s otvorom. Jeho pokus o vytvorenie funkčnej závislosti vyzeral nasledovne:

2 kocky s otvorom.....	6.9 + 4.8 + 2.12 = 110 samolepiek
3 kocky s otvorom.....	8.9 + 6.8 + 3.12 = 156 samolepiek
4 kocky s otvorom.....	10.9 + 8.8 + 4.12 = 202 samolepiek
⋮	⋮
10 kociek s otvorom.....	22.9 + 20.8 + 10.12 = 478 samolepiek

Tento zápis mu pomohol dopracovať sa k funkčnej závislosti, ktorú však už explicitne neuviedol, ale ktorá sa dá zapísať matematicky takto:

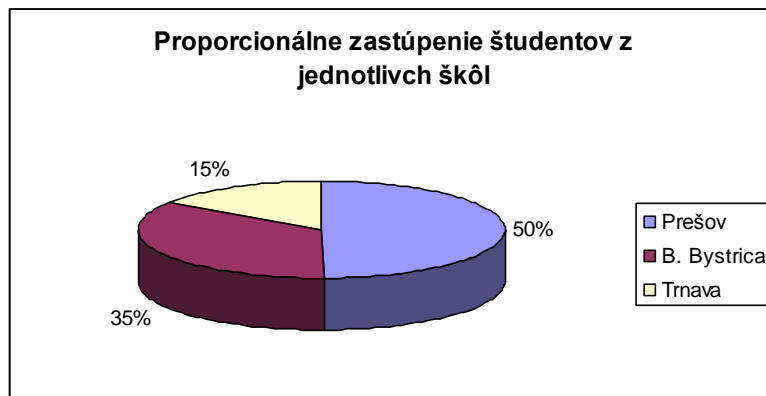
$$(2n + 2) \cdot 9 + 2n \cdot 8 + 12n = m,$$

kde n je počet kociek s otvorom a m počet samolepiek potrebných na stavbu.

Chyby, ktoré sa ešte vyskytli a ktoré teraz uvedieme súvisia skôr s proporcionálnym myslením, ako s priestorovou predstavivosťou a ťažko ich zaradiť do nezvládnutej niektorej z vyššie uvedených troch úrovní porozumenia. Pripisujeme ich nedôslednosti alebo nesústreďenosti študentov: výsledok výpočtu samolepiek na jednu kocku s otvorom vyšiel vyšší ako na dve kocky s otvorom; na oblepenie dvoch kociek potrebuje Samko viac samolepiek ako na oblepenie 10-tich takých istých kociek; jedna kocka má viac samolepiek (106) ako dve kocky (18); kocka bez otvoru má 54 nálepiek a s otvorom už len 14.

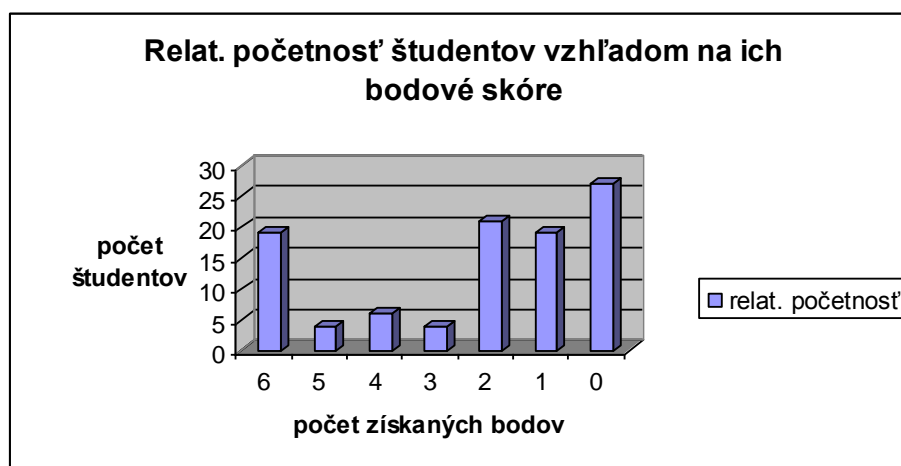
3. Štatistické spracovanie získaných výsledkov

Zadanú úlohu riešilo 259 študentov už spomenutých slovenských pedagogických fakúlt. Celkové proporčné zastúpenie uvádzame v grafe č.1.



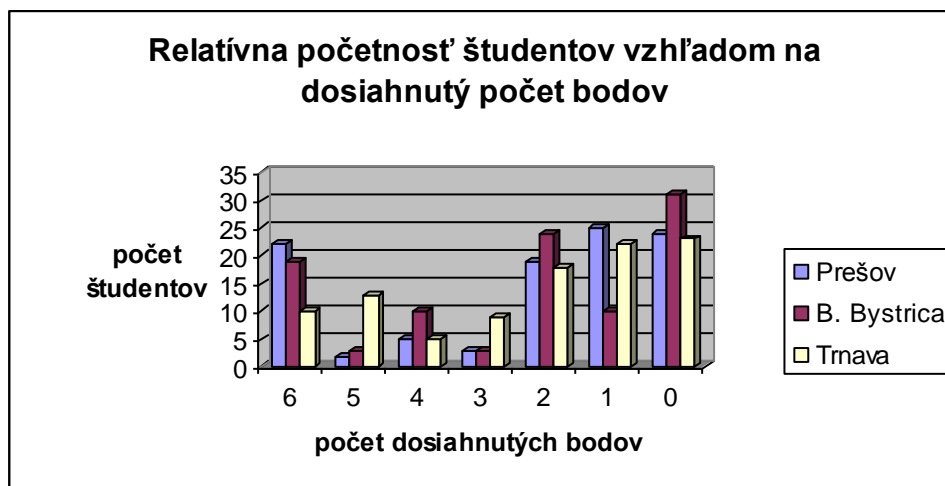
Graf č. 1

Úloha o kockách pozostávala z podotázok, ktoré boli obodované nasledovne: 1. otázka1b, 2.otázka1b, 3. otázka2b, 4. otázka2b. Podľa výsledkov testovania iba **18,5%** študentov vyriešilo zadanú úlohu celkom správne, teda na plný počet bodov (pozri graf. č. 2). Jednotlivé otázky na seba nadväzovali, pričom ich obtiažnosť gradovala. Prvé dve otázky boli z hľadiska výpočtu jednoduchšie, v tretej, ale najmä v štvrtej otázke sa vyžadovali určité reflexie. S istou mierou tolerancie možno povedať, že študent, ktorý v prvých dvoch otázkach nezískal body, nezískal ich ani v nasledujúcich dvoch otázkach. Z grafu č. 2 vidieť, že študentov, ktorí získali za vyriešenie otázky 3 – 5 bodov, t. j. vyriešili len časť z otázok z vyššej úrovne (2-bodové otázky) bolo málo. Z tohto pohľadu nemožno hovoriť o normálnom rozdelení študentov.



Graf č. 2.

Z výsledkov tiež vyplýva (pozri grafy č. 2 a 3), že veľké percento študentov nevedelo úlohu riešiť ani na základnej – reprodukčnej úrovni (0 bodov získalo 27% zo všetkých študentov). Pomerne veľké percento bolo tých, ktorí vypočítali počet samolepiek na jednej kocke bez otvoru alebo aj s otvorom (1-2 body získalo spolu približne 40% študentov). Úroveň prepojenia a reflexie (t.j. tí, čo mali 4 a viac bodov) dosiahlo približne 29% zo všetkých študentov.



Graf č. 3

Jedným z cieľov kvantitatívneho vyhodnotenia údajov bolo zistiť rovnorodosť vzoriek respondentov, t.j. či študenti z jednotlivých fakúlt patria do jedného základného štatistického súboru. Pomocou neparametrického t-testu významnosti rozdielu medzi dvoma strednými hodnotami pre nezávislé súbory sme overovali nasledujúcu hypotézu:

H: Medzi výsledkami riešenia úlohy na priestorovú predstavivosť študentov z Trnavy, Prešova a z Banskej Bystrice je štatisticky významný rozdiel.

Na hladine významnosti $p = 0,05$ sa hypotéza nepotvrdila. Teda medzi aritmetickými priemerami získaných bodov študentov jednotlivých škôl nie je štatisticky významný rozdiel.

Tých istých študentov, ale len z Trnavskej univerzity, sme testovali s polročným časovým odstupom. Cieľom testovania bolo zistiť, či sa u nich zlepšila úroveň priestorovej predstavivosti. Študenti riešili rovnakú úlohu o kockách ako v 1. teste. Nasledujúca tabuľka uvádza porovnanie absolútnych početností študentov v jednotlivých kategóriách podľa získaných bodov v 1. a 2. teste .

počet študentov	október 2008	apríl 2009
6 -bodov	4	12
5 -bodov	5	1
4 -bodov	2	2
3 -bodov	4	3
2 -bodov	7	8
1 -bodov	9	6
0 -bodov	9	0
Spolu študentov	40	32

Tab. č. 1

Z údajov vyplýva (pozri tab. č.1), že počet študentov, ktorí úspešne vyriešili danú úlohu sa zvýšil oproti 1. testu o 28%. Nula bodov nemal v 2. teste ani jeden študent. Pri druhom testovaní boli študenti s prácou hotoví oveľa skôr ako pri prvom (v priemere o 20 minút) a vo väčšine prípadov neuvádzali spôsob riešenia, čo by mohlo nasvedčovať tomu, že si úlohu pamätali. Z dvanástich študentov z 2. testovania, ktorí vyriešili úlohu na plný počet bodov, len jeden uviedol aj spôsob výpočtu. Ostatní pravdepodobne počítali spamäti, keďže pomocné papiere k dispozícii nemali. Chyby týkajúce sa nepochopenia zadania na reprodukčnej úrovni – napr. to, že údaj 3cm sa týka kocôčok, z ktorých sa skladá veľká kocka a nie veľkej kocky – sa už nevyskytli.

4. Záver

Závery kvalitatívnej a kvantitatívnej analýzy sú nasledovné:

- Nielen v živote ale aj v matematike je pre ľudí ťažké zmeniť myslenie a pozrieť sa na vec z inej strany. Aj v prípade našej úlohy študenti neboli schopní skorigovať svoje nesprávne predpoklady (to, že jedna samolepka vystačí na jednu stenu veľkej kocky), aj keď z ich komplikovaných výpočtov bolo zjavné, že úlohu neriešia správne.
- Zadané údaje v úlohe, ktoré mohli svojou zdanlivou nejednoznačnosťou uviesť do omylu, študenti neboli schopní vnímať v celom kontexte úlohy (reprodukčná úroveň).
- U študentov prevláda tendencia:
 - o držať sa rigorózne toho, čo je napísané (V 3. a 4. úlohe chýbalo slovíčko „zvnútra“, preto uvádzali dva výsledky)
 - o pomáhať si názornými obrázkami a náčrtmi.
- Úroveň reflexie robila študentom problémy. Viac ako všeobecným výpočtom a vlastným odvodeniam všeobecných vzorcov študent dôveruje konkrétnemu pracovnému počítaniu po jednom.
- Kde chýba priestorová predstavivosť, pomôže dobrá vizuálna pamäť. (Opakovanie testu s časovým odstupom prinieslo zlepšenie úspešnosti študentov najmä na úrovni reprodukcie textu.)

Literatúra

- [1] KORŠŇÁKOVÁ, P. a kol. *Národná správa OECD PISA SK 2006*. Bratislava: ŠPÚ, 2006. ISBN 978-80-89225-37-8.
- [2] GOMBÁR, M., MOKRIŠ, M., ZELOVÁ, V. *Analýza úrovne matematickej gramotnosti študentov predškolskej a elementárnej pedagogiky – oblasť kvantita*, Zborník príspevkov z konferencie „Matematika z pohľadu primárneho vzdelávania“, 2009, Tále: 2008. ISBN 978-80-8083-742-6, p. 58-62.
- [3] JIROTKOVÁ, D. *Rozvoj priestorové predstavivosti žáků*, in: Komenský, č. 5, Praha 1990
- [4] *Preparing students for Pisa*, http://www.gov.pe.ca/photos/original/ed_PISA_math2.pdf, 10.10.2009

Príspevok bol spracovaný ako súčasť grantového projektu Analýza matematickej prípravy študentov odboru Predškolskej a elementárnej pedagogiky z pohľadu rozvoja matematickej gramotnosti (MŠ SR VEGA 1/0292/08).