O TOPOLOGICKÝCH VLASTNOSTECH ZOBRAZENÍ MEZI TŘÍDAMI

Jiří Havlík, Běla Šikulová

Katedra matematiky a fyziky, Univerzita obrany
Kounicova 65, 612 00 Brno, Česká republika
E-mail : havlik.ji@centrum.cz , bela.sikulova@unob.cz

Abstract: Our article is the conclusion part of our previous article from 2008. For details see: J.Havlík, B.Šikulová - O topologii na objektu typu třída in Acta Facultatis Paed. Univ. Tyrnaviensis, Ser. C, 2008, no.12, pp.7-15.

We are going to make following definitions: the definition of the continuous mapping between two classes, the definition of topological subspaces, and the definition of the limit of a mapping. We will work with objects that are classes and not only sets and we are trying to prove basic theorems which will be applied on the ordinal number class and its subclasses.

Key words: Class, ordinal, continous mapping, limit of a mapping.

1. Úvod

V tomto článku navazujeme na náš předchozí článek [4] z roku 2008, který vyšel v tomto časopise pod názvem O topologii na objektu typu třída. Dříve naznačené záměry zůstávají stejné a navazuje i číslování vět a definic. Co se týká značení, tak odkazujeme opět na [4].

2. Pokračování teoretické části

Definice 5. Buďte E a E' dvě třídy s topologií. Nechť $F : E \to E'$. Toto zobrazení nazveme *spojitým v bodě* $x_0 \in E$ právě tehdy, když ke každému okolí v' bodu $F(x_0)$ v E' existuje okolí v bodu x_0 v E, že platí $F[v] \subseteq v'$. Zobrazení F nazveme *spojitým zobrazením* na E právě tehdy, když je spojité v každém bodě třídy E .

Věta 13. Buďte E a E' dvě třídy s topologií a nechť $F :\ E \longrightarrow E'$, potom:

(i) zobrazení F je spojité v bodě $x_0 \in E$ právě tehdy, když vzor $F^{-1}[v']$ každého okolí v' bodu $F(x_0)$ v E' obsahuje okolí bodu x_0 v E ;

(ii) je-li F spojité v bodě $x_0 \in E \ \&\ x_0 \in \bar{A}$, kde $A \subseteq E$, potom bod $F(x_0)$ je bodem uzávěru třídy $F[A]$.

Důkaz: (i): Nechť F je spojité v bodě $x_0 \in E$ a buď v' okolí bodu $F(x_0)$ v E'. Potom existuje okolí v bodu x_0 v E, že $F[v] \subseteq v' \to F^{-1}[F[v]] \subseteq F^{-1}[v'] \to v \subseteq F^{-1}[F[v]] \subseteq F^{-1}[v']$. (Užili jsme věty [TM] I.4.21, I.4.33.)
Buď v' okolí bodu $F(x_0)$ v E', potom $F^{-1}[v']$ obsahuje okolí v bodu x_0 v E, tj. $v \subseteq F^{-1}[v'] \to F[v] \subseteq F[F^{-1}[v']] \to F[v] \subseteq F[F^{-1}[v']] \subseteq v'$. Opět jsme užili věty [TM] I.4.21, I.4.33.

(ii): Nechť v' je okolí $F(x_0)$ v E', tak $F^{-1}[v]$ obsahuje okolí v bodu x_0 v E. Proto existuje bod $y \in A \cap F^{-1}[v']$ a tudíž $F(y) \in F[A \cap F^{-1}[v']] \subseteq F[A] \cap F[F^{-1}[v']] \subseteq F[A] \cap v'$. (Plyne z věty [TM] I.4.23.)

Věta 14. Nechť $F : E \to E'$, přičemž E, E' jsou třídy s topologií. Následující vlastnosti jsou ekvivalentní:

(i) F je spojité zobrazení;

(ii) $A' = (A')^\circ \longrightarrow F^{-1}[A'] = (F^{-1}[A'])^\circ$, kde $A' \subseteq E'$;

(iii) $A' = \overline{A'} \longrightarrow F^{-1}[A'] = \overline{F^{-1}[A']}$, kde $A' \subseteq E'$;

(iv) $A \subseteq E \longrightarrow F[\overline{A}] \subseteq \overline{F[A]}$.

Důkaz: (i) $\longrightarrow$ (iv): $y \in F[\overline{A}] \to x \in \overline{A}$ & $y = F(x) \to y \in \overline{F[A]}$, tj. $F[\overline{A}] \subseteq \overline{F[A]}$. (Použila se věta 13(ii).)

(iv) $\longrightarrow$ (iii): nechť $A' = \overline{A'}$ a položme $A = F^{-1}[A'] \to \overline{A} = \overline{F^{-1}[A']} \to F[\overline{A}] = F[\overline{F^{-1}[A']}] \subseteq \overline{F[F^{-1}[A']]} \subseteq \overline{A'} = A' \to F^{-1}[F[\overline{A}]] \subseteq F^{-1}[A'] \to \overline{A} \subseteq F^{-1}[F[\overline{A}]] \subseteq F^{-1}[A'] = A$, tj. $\overline{A} \subseteq A$. Poněvadž $A \subseteq \overline{A}$, tak $A = \overline{A}$, tj. $F^{-1}[A'] = \overline{F^{-1}[A']}$.

(iii) $\longrightarrow$ (ii): nechť $A' = (A')^\circ \to E' - A' = \overline{E' - A'} \to F^{-1}[E' - A'] = \overline{F^{-1}[E' - A']} \to$
$$\to E - F^{-1}[E' - A'] = (E - F^{-1}[E' - A'])^\circ \tag{14.1}$$
(Použily se věty 7(i) a 7(ii) z [4].)
$E - F^{-1}[E' - A'] = E - (F^{-1}[E'] - F^{-1}[A']) = E - (E - F^{-1}[A']) = (E - E) \cup (E \cap F^{-1}[A']) = F^{-1}[A']$; dosazením do (14.1) potom dostáváme: $F^{-1}[A'] = (F^{-1}[A'])^\circ$.

(ii) $\longrightarrow$ (i): nechť v' je okolí bodu $F(x_0) \to$ existuje $o' : F(x_0) \in o' \in \mathcal{T}'$, že $F(x_0) \in o' \subseteq v' \to x_0 \in F^{-1}[o'] = (F^{-1}[o'])^\circ \to x_0$ je vnitřní bod třídy $F^{-1}[o'] \to$ existuje okolí v bodu x_0, že $x_0 \in v \subseteq F^{-1}[o']$ a potom $F[v] \subseteq F[F^{-1}[o']] \subseteq o' \subseteq v'$.

Věta 15. Nechť $F : E_1 \longrightarrow E_2,\ G : E_2 \longrightarrow E_3$, kde E_1, E_2, E_3 jsou třídy s topologií. Buď zobrazení F spojité v bodě x_0 a G buď spojité v $F(x_0)$. Potom $GF : E_1 \longrightarrow E_3$ je spojité v x_0.

Důkaz: Nechť w je okolí bodu $G(F(x_0))$. Existuje okolí bodu v_2 bodu $F(x_0)$ tak, že $G[v_2] \subseteq w$. K okolí v_2 bodu $F(x_0)$ zase existuje okolí v_1 bodu x_0, že $F[v_1] \subseteq v_2$. Potom je $(GF)[v_1] = G[F[v_1]] \subseteq G[v_2] \subseteq w$.

Věta 16. Nechť $F : On \longrightarrow On$ je neklesající zobrazení. F je spojité právě tehdy, když pro každý limitní ordinál λ platí:

$$F(\lambda) = sup\{F(\alpha) : \alpha < \lambda \ \& \ \alpha \in On\}.$$

Důkaz: Předpokládejme, že F je spojité zobrazení a buď λ limitní ordinál a uvažujme o $\lambda' = F(\lambda)$. Poněvadž pro $\alpha < \lambda$ platí $F(\alpha) \leq F(\lambda)$, tak λ' je majoranta třídy $F[\lambda] = \{F(\alpha) : \alpha < \lambda \ \& \ \alpha \in On\}$.
Předpokládejme, že existuje $\mu \in On \ \ \& \ \ \mu < \lambda' \ \ \& \ \ \mu$ je majoranta $F[\lambda]$. Potom k okolí $v' = (\mu, \lambda' \cup \{\lambda'\})$ bodu λ' existuje okolí v bodu λ, že $F[v] \subseteq v'$. Z limitnosti λ a věty 5. (ii) v [4] plyne existence $\gamma < \lambda$, že $\{\xi \in On : \gamma < \xi \leq \lambda\} = I_\gamma \subseteq v$.
Poněvadž $\gamma \cup \{\gamma\} \in I_\gamma$, tak $F(\gamma \cup \{\gamma\}) \in v'$, tj. $\mu < F(\gamma \cup \{\gamma\}) \ \& \ \gamma \cup \{\gamma\} < \lambda$ a to je spor s definicí μ, neboť $F(\gamma \cup \{\gamma\}) \in F[\lambda]$. Proto $F(\lambda) = sup\,(F[\lambda])$.

Buď F neklesající ordinální funkce a vyšetřujme spojitost F v izolovaném ordinálu λ . Nechť v' je libovolné okolí bodu $F(\lambda)$; dle věty 5. (ii) v [4] je $\{\lambda\}$ okolí bodu λ a tedy $F[\{\lambda\}] = \{F(\lambda)\} \subseteq v'$. Odtud: zobrazení F je spojité v každém izolovaném ordinálu.

Vyšetřujme nyní spojitost v libovolném limitním ordinálu λ. Budiž $\lambda' = F(\lambda) = sup\{F(\lambda) : \alpha < \lambda \ \& \ \alpha \in On\}$. Nechť v' je okolí bodu $\lambda' \to$ existuje $o' \in \mathcal{T}$, že $\lambda' \in o' \subseteq v' \ \to$

$$\to \left\{ \begin{array}{l} \exists \alpha' \in On : \ \lambda' \in (\leftarrow, \alpha') \subseteq o' \subseteq v', \\ \exists \alpha', \beta' \in On : \lambda' \in (\beta', \alpha') \subseteq o' \subseteq v'. \end{array} \right\} \qquad (16.1)$$

Předpokládejme $\lambda' = 0$, potom pro každé $\alpha \leq \lambda$ je $F(\alpha) = 0$. V tomto případě je snadné dokázat spojitost F v bodě λ. Interval $(\leftarrow, \lambda \cup \{\lambda\})$ je okolí bodu λ a platí $F[(\leftarrow, \lambda \cup \{\lambda\})] = \{0\} = \{\lambda'\} \subseteq v'$. V dalším proto uvažujeme pouze $\lambda' > 0$. Za tohoto předpokladu můžeme varianty (16.1) sloučit v jeden případ. Tedy existují $\beta'', \alpha'' \in On$, že $\lambda' \in (\beta'', \alpha'') \subseteq v'$. Poněvadž $\beta'' < \lambda'$, existuje potom $\alpha < \lambda$, že $\beta'' < F(\alpha)$. Položme $A = (\alpha, \lambda \cup \{\lambda\})$. A je okolí bodu λ a pro $\gamma \in A$ je :

$$\beta'' < F(\alpha) \leq F(\gamma) \leq F(\lambda) = \lambda' < \alpha'',$$

odtud následuje

$$\gamma \in \alpha \to F(\gamma) \in (\beta'', \alpha'')\,,$$

a proto:

$$F[A] \subseteq (\beta'', \alpha'') \subseteq v'\,,$$

kde A je okolí bodu λ.

Lemma 2. Buď E třída s topologií $\mathcal{T}, E' \subseteq E \ \& \ E' \neq \emptyset$. Položme

$$\mathcal{T}' = \{a' : (\exists a)(a \in \mathcal{T} \ \& \ a' = a \cap E')\}.$$

Potom E' je třída s topologií $\mathcal{T}'$.

Důkaz: Nechť $a', b' \in \mathcal{T}'$, pak existuje $a, b \in \mathcal{T}$, že platí $a' = E' \cap a$, $b' = E' \cap b$; odtud $a' \cap b' = E' \cap (a \cap b)$, kde $a \cap b \in \mathcal{T}$. Proto $a' \cap b' \in \mathcal{T}'$.
Buď nyní $\langle a'_j : j \in i \rangle$ libovolný soubor množin z $\mathcal{T}'$. Především je tento soubor množina a dle [TM] I.4.40 je taktéž $\bigcup\limits_{j \in i} a'_j$ množina.

Ke každému a'_j existuje $a_j \in \mathcal{T}$, že $a'_j = a_j \cap E'$. Uvažujme o souboru $\langle a_j : j \in i \rangle$. Poněvadž E je třída s topologií $\mathcal{T}$, tak dle definice 1. v [4], požadavek (ii), musí být $a = \bigcup_{j \in i} a_j \in \mathcal{T}$. Potom je $a \cap E' \in \mathcal{T}'$ a navíc

$$a \cap E' = E' \cap \bigcup_{j \in i} a_j = \bigcup_{j \in i} (E' \cap a_j) = \bigcup_{j \in i} a'_j$$

(druhá rovnost plyne z [TM] I.4.41(i)), tudíž $\bigcup_{j \in i} a'_j \in \mathcal{T}'$, čímž je ověřena podmínka (ii) z definice 1. v [4].

Je zřejmé: $\bigcup \mathcal{T}' \subseteq E'$. Nechť $x \in E' \to x \in E = \bigcup \mathcal{T} \to$ pak existuje $a \in \mathcal{T}$, že $x \in a \to x \in a' = E' \cap a \in \mathcal{T}' \to x \in \bigcup \mathcal{T}'$. Celkem tedy $E' = \bigcup \mathcal{T}'$.

Všechny podmínky definice 1. jsou tudíž splněny a $\mathcal{T}'$ je topologie na třídě E' .

To nás opravňuje k definici.

Definice 6. Buď E třída s topologií $\mathcal{T}, E' \subseteq E \ \ \& \ \ E' \neq \emptyset$. Třídu E' s topologií $\mathcal{T}' = \{a' : (\exists a)(a \in \mathcal{T} \ \ \& \ \ a' = a \cap E')\}$ nazýváme *topologickým podprostorem* topologického prostoru E a $\mathcal{T}'$ nazýváme *indukovanou topologií* na E' topologií $\mathcal{T}$ na E.

Věta 17. Buď E třída s topologií $\mathcal{T}, E' \subseteq E \ \ \& \ \ E' \neq \emptyset$ a $\mathcal{T}'$ indukovaná topologie na E' topologií $\mathcal{T}$. Nechť $x \in E'$, potom w je okolí bodu x v E' právě tehdy, když existuje takové okolí v bodu x v E, že $w = v \cap E'$.

Důkaz: Nechť w je okolí bodu x v $E' \to$ existuje $o' \in \mathcal{T}'$, že $x \in o' \subseteq w \to$ existuje $o \in \mathcal{T}$, že $o' = o \cap E' \to x \in o \ \ \& \ \ (w \cup o) \cap E' = (w \cap E') \cup (o \cap E') = w \cup o' = w \ \ \& \ \ w \cup o$ je okolí bodu x v E.

Nechť v je okolí bodu x v E, uvažujme o $w = v \cap E'$. Existuje $o \in \mathcal{T}$, že $x \in o \subseteq v$. Poněvadž $x \in E'$, tak $x \in o \cap E' = o' \in \mathcal{T}'$; odtud dále plyne: $o' \subseteq o \subseteq v \ \ \& \ \ o' \subseteq E' \to o' \subseteq w \ \ \& \ \ x \in o'$, tedy w je okolí bodu x v topologickém podprostoru E' prostoru E.

Věta 18. Buď F neklesající ordinální funkce, $Dom(F) \in On$ a na $Dom(F)$ pohlížejme jako na topologický podprostor prostoru On s intervalovou topologií (viz větu 2. v [4]). F je spojitá právě tehdy, když pro každý limitní ordinál $\lambda \in Dom(F)$ platí:

$$F(\lambda) = sup\{F(\alpha) : \alpha < \lambda \ \ \& \ \ \alpha \in On\}.$$

Důkaz: Označme $Dom(F) = \beta$. Předpokládejme, že F je spojité zobrazení, λ je limitní ordinál a $\lambda \in \beta$. Uvažujme o množině $F[\lambda]$. Pro libovolné $F(\alpha) \in F[\lambda]$ je $F(\alpha) \leq F(\lambda)$, neboť $\alpha < \lambda$. Proto $\lambda' = F(\lambda)$ je majoranta množiny $F[\lambda]$. Předpokládejme, že existuje $\mu \in On$, že $\mu < F(\lambda) = \lambda'$ a μ je majoranta $F[\lambda]$. Potom $(\mu, \lambda' \cup \{\lambda'\})$ je okolí bodu λ' a existuje okolí v_p bodu λ v $Dom(F)$, že $F[v_p] \subseteq (\mu, \lambda' \cup \{\lambda'\})$. Dle věty 17. existuje okolí v bodu λ v topologickém prostoru On, že $v_p = \beta \cap v$. Podle věty 5.(ii) v [4] existuje $\mu \in On \ \ \& \ \ \mu < \lambda$, že $I_\mu = \{\gamma \in On : \mu < \gamma \leq \lambda\} \subseteq v$. Ale protože $\lambda \in \beta$, tak $I_\mu \subseteq \beta$.

Odtud: $$I_\mu \subseteq v_p \to F[I_\mu] \subseteq (\mu, \lambda' \cup \{\lambda'\}). \quad (18.1)$$

Poněvadž $\mu \cup \{\mu\} \in I_\mu$, tak $F(\mu \cup \{\mu\}) \in F[I_\mu]$ a s pomocí (18.1) dostáváme $\mu < F(\mu \cup \{\mu\})$, přičemž $\mu \cup \{\mu\} < \lambda$ (plyne z limitnosti ordinálu λ). Tedy μ není majoranta $F[\lambda]$ a to je spor s předpoklady. Proto $F(\lambda) = sup\,(F[\lambda])$.

Nyní dokážeme opačnou implikaci. Buď $\lambda \in \beta$ a nechť λ je izolovaný ordinál. Dle věty 5. (ii) v [4] je $\{\lambda\}$ okolí bodu λ v prostoru On a dle věty 17. je $\{\lambda\}$ okolí bodu λ v podprostoru β. Ovšem $F[\{\lambda\}] = \{F(\lambda)\} \subseteq w$, kde w je libovolné okolí bodu $F(\lambda)$. Proto F je spojité zobrazení v bodě λ.

Buď $\lambda \in \beta$, přičemž λ je limitní ordinál a předpokládejme $F(\lambda) = sup\,(F[\lambda])$. Označme opět $\lambda' = F(\lambda)$ a nechť w je okolí bodu λ'. Jestliže $\lambda' = 0$, tak $F(\alpha) = 0$ pro $\alpha \leq \lambda$. Položme $v = (\leftarrow, \lambda \cup \{\lambda\})$, v je okolí bodu λ v podprostoru $\beta = Dom(F)$ a platí $F[v] = \{0\} = \{\lambda'\} \subseteq w$. V tomto případě je F spojité v bodě λ . V dalším předpokládejme $\lambda' > 0$. Existuje $o' \in \mathcal{T}$ & $\lambda' \in o' \subseteq w \longrightarrow$

$$\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists \alpha' \in On, \text{ že } \lambda' \in (\leftarrow, \alpha') \subseteq o' \subseteq w \;\&\; \lambda' > 0 \rightarrow \exists \beta' \in On, \text{ že} \\ \lambda' \in (\beta', \alpha') \subseteq o' \subseteq w \\ \exists \alpha', \beta' \in On, \text{ že } \lambda' \in (\beta', \alpha') \subseteq o' \subseteq w \end{array} \right\} \longrightarrow$$

$\longrightarrow$ celkem tedy : $(\exists \beta' \in On)(\exists \alpha' \in On)(\lambda' \in (\beta', \alpha') \subseteq w)$. Poněvadž $\beta' < \lambda'$, tak existuje $\alpha < \lambda$, že $\beta' < F(\alpha)$. Položme $v = (\alpha, \lambda \cup \{\lambda\})$; v je okolí bodu λ v podprostoru $\beta = Dom(F)$. Pro $\gamma \in v$ je:

$$\beta' < F(\alpha) \leq F(\gamma) \leq F(\lambda) = \lambda' < \alpha',$$

odtud: $F[v] \subseteq (\beta', \alpha') \subseteq w$. Proto F je spojité v ordinálu λ.

Důsledek 1. Buď F neklesající ordinální funkce, potom

(i) F je spojitá v limitním ordinálu $\lambda \in Dom(F) \leftrightarrow F(\lambda) = sup\,(F[\lambda])$,

(ii) F je spojitá $\leftrightarrow$ pro každý limitní ordinál $\lambda \in Dom(F)$ platí:

$$F(\lambda) = sup\,(F[\lambda]).$$

Důkaz: (i) je důsledek důkazů vět 16. a 18.

(ii) je spojení vět 16. a 18.

Definice 7. Buďte E, E' dvě třídy pořadě s topologií $\mathcal{T}$ a $\mathcal{T}'$, dále buďte $A \subseteq E$, $a \in \overline{A}$, $F : A \longrightarrow E'$.

Jestliže (I.) $a \notin A$, tak řekneme, že F má *limitu* $a' \in E'$ pro $x \in A$ a blížící se k a (nebo a je *limita zobrazení* F *v bodě* $a \in \overline{A}$ vzhledem k třídě A), pokud zobrazení $F' : A \cup \{a\} \longrightarrow E'$, definované následovně:

$$F' : x \mapsto F(x), \text{ pro } x \in A\ ,$$
$$F' : a \mapsto a'\ ,$$

je spojité v bodě a topologického podprostoru $A \cup \{a\}$ prostoru E. Potom píšeme $a' = \lim\limits_{x \to a, x \in A} F(x)$.

Jestliže (II.) $a \in A$ a F je spojité zobrazení v bodě a, tak použijeme to samé označení a terminologii a píšeme $F(a) = \lim\limits_{x \to a, x \in A} F(x)$.

Věta 19. Nechť E a E' jsou dvě třídy pořadě s topologií $\mathcal{T}$ a $\mathcal{T}'$; buď $A \subseteq E$, $a \in \overline{A}$, $F : A \longrightarrow E'$, $a' \in E'$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\lim\limits_{x \to a, x \in A} F(x) = a'$;

(ii) ke každému okolí v' bodu a' v E' existuje takové okolí v bodu a v E, že platí $F[v \cap A] \subseteq v'$ (pozn.: v, v' jsou množiny).

Důkaz: (i) $\to$ (ii): Buď v' okolí bodu a' a nechť $a \in A$. Dle 7. definice je F spojité zobrazení v bodě a . Tedy k libovolnému okolí v' bodu a' existuje takové okolí v_A bodu a v podprostoru A, že platí $F[v_A] \subseteq v'$. Dle 17. věty existuje takové okolí v bodu a v prostoru E, že platí $v_A = A \cap v$ a poslední inkluzi můžeme tedy zapsat ve tvaru $F[A \cap v] \subseteq v'$. Nyní předpokládejme $a \in \overline{A}$ & $a \notin A$. Podle definice potom musí být zobrazení

$$\begin{aligned} &G : A \cup \{a\} \to E' \\ &G : x \mapsto F(x), \quad \text{pro } x \in A \\ &G : a \mapsto a' \end{aligned}$$

spojité v bodě a . Tudíž k okolí v' bodu a' existuje takové okolí $v_{A \cup \{a\}}$ bodu a v podprostoru $A \cup \{a\}$, že $G[v_{A \cup \{a\}}] \subseteq v'$. Ze 17. věty ihned plyne, že existuje takové okolí v bodu a v prostoru E, že $v_{A \cup \{a\}} = (A \cup \{a\}) \cap v$. Poslední inkluze nám proto přechází do tvaru $G[(A \cup \{a\}) \cap v] \subseteq v'$ a odtud můžeme uzavřít:

$$F[A \cap v] = G[A \cap v] \subseteq G[(A \cap v) \cup \{a\}] = G[(A \cup \{a\}) \cap (v \cup \{a\})] =$$
$$= G[(A \cup \{a\}) \cap v] \subseteq v' \ .$$

(ii) $\to$ (i): Nechť $a \in A$. Buď v' libovolné okolí bodu a' v E', potom existuje okolí v bodu a v E, že platí $F[v \cap A] \subseteq v'$. Dle 17. věty je $v \cap A$ okolí bodu a v podprostoru A a tedy F je spojité zobrazení v bodě a.

Nechť $a \in \overline{A}$ & $a \notin A$. Definujme zobrazení $G : A \cup \{a\} \to E'$ následovně

$$\begin{aligned} &G|A = F \\ &G(a) = a' \end{aligned}$$

a buď v' libovolné okolí bodu a' v E'. Dle předpokladů existuje okolí v bodu a v E, že platí $F[v \cap A] \subseteq v'$. Dle 17.věty je množina $v \cap (A \cup \{a\})$ okolí bodu a v podprostoru $A \cup \{a\}$ a platí

$$G[v \cap (A \cup \{a\})] = G[(v \cap A) \cup (v \cap \{a\})] = G[(v \cap A) \cup \{a\}] =$$
$$= G[v \cap A] \cup \{G(a)\} = F[v \cap A] \cup \{a'\} \subseteq v' \cup \{a'\} = v'.$$

Tudíž zobrazení G je spojité v bodě a.
Dle 7. definice jsme ukázali, že $\lim\limits_{x \to a, x \in A} F(x) = a'$.

Věta 20. Buď F neklesající ordinální funkce, nechť $\lambda \in Dom(F)$ je limitní ordinál. Potom F má limitu v λ vzhledem k $Dom(F)$ právě tehdy, když $F(\lambda) = sup\,(F[\lambda])$. V tomto případě je

$$\lim_{\gamma \to \lambda, \gamma \in Dom(F)} F(\gamma) = F(\lambda) = sup\,(F[\lambda]).$$

Důkaz: plyne bezprostředně z definice 7. a důsledku 1.

3. Závěr

Článek se zabývá rozšířením základního topologického pojmového aparátu budovaného na pojmu množiny do oblasti tříd a jeho názornou aplikací v oblasti třídy ordinálních čísel a jejich podtříd.

Literatura

[1] BALCAR,B., ŠTĚPÁNEK,P.: Teorie množin, 1.vydání, Praha: Academia, 1986.
[2] DIEUDONNÈ,J.A.: Foundation of Modern Analysis, Enlarged and Corrected Printing, New York: Academic Press, 1969.
[3] DIEUDONNÈ,J.A.: Treatise on Analysis - Volume II, New York: Academic Press, 1970.
[4] HAVLÍK,J., ŠIKULOVÁ,B.: O topologii na objektu typu třída, Acta Facultatis Paed. Univ. Tyrnaviensis, Ser. C, 2008, no.12, pp.7-15.