GEOMETRICKÁ ALGEBRA V PRAXI [1]

Ján Čižmár

Katedra matematiky a informatiky, Pedagogická fakulta, Trnavská univerzita
Priemyselná 4, P. O. BOX 9, 918 43 Trnava, SR
e-mail: jan.cizmar@truni.sk

Abstract. This paper demonstrates the applications of the geometric algebra in the solving several ancient and medieval algebraic problems and in elementary approximating constructions by means of ICT.

Key words: geometric algebra, equation of 3rd degree, regular polygon

1. Úvod

Geometrická algebra[2] ako temer univerzálna metóda znázorňovania čísel (= prirodzených čísel), pomerov (=kladných zlomkov) a kvadratických iracionalít v antickej grécko-helenistickej matematike v určitej miere eliminovala nedostatky príznačné pre algebru vtedajších čias. Aritmetika s algebrou disponovali minimálnym pojmovým aparátom, ktorý tvorili čísla, pomery, úmery, priemery (aritmetický, geometrický, harmonický), operácie sčitovania a násobenia čísel, obmedzené operácie odčitovania a delenia čísel a slovné manipulácie s neznámou. Až do čias Diofanta (polovica 3. storočia) chýbala akákoľvek symbolika pre premenné alebo neznáme veličiny, pre relácie a operácie a ani potom sa Diofantovo označovanie nerozšírilo a nestalo sa štandardným prostriedkom matematiky dokonca ani v regióne svojho zrodu. Prednosť geometrickej algebry bola o. i. v schopnosti modelovať a interpretovať geometrickými prostriedkami kvadratické iracionality. Všeobecný úzus grécko-helenistickej matematiky vyjadrovať číselné charakteristiky objektov *pomerom* k tým istým číselným charakteristikám iných objektov toho istého druhu modeloval iracionálne čísla úsečkou, ktorej dĺžka by v porovnaní s dĺžkou inej známej úsečky – špeciálne jednotkovej – bola v dnešnom ponímaní vyjadrená pomerom iracionálneho čísla k racionálnemu číslu, teda v závere iracionálnym číslom.

Obmedzenia geometrickej algebry vyplývali z jej geometrickej názornosti. Ak číslo (v dnešnom chápaní) bolo znázornené úsečkou príslušnej *dĺžky*, súčin dvoch čísel znamenal *obsah* pravouholníka, ktorého susedné strany mali za dĺžky dané čísla, súčin troch čísel znamenal *objem* kvádra, ktorého tri hrany so spoločným vrcholom mali za dĺžky dané tri násobené čísla. Táto interpretácia ohraničovala číslom tri počet potenciálnych činiteľov, ktorých súčin bol ešte geometricky zmysluplný, a zároveň umožňovala porovnávať len veličiny toho istého (topologického) rozmeru, teda dĺžku s dĺžkou, obsah s obsahom a objem s objemom. Táto nevyhnutná a dostačujúca podmienka porovnateľnosti dvoch čísel získala historicky názov *princíp homogenity*. Explicitne je sformulovaná v „axiomatizácii“ *teórie proporcií* od Eudoxa (asi 408 – asi 355 p. n. l.).

Číslo 3 je zároveň horná hranica stupňa neznámej veličiny, ktorej nájdenie (v geometrickej podobe úsečky) je potenciálne možné použitím geometrických prostriedkov. Stupeň neznámej možno zvýšiť na štyri, ak metóda hľadania bude pozostávať z opakovaného hľadania

[1] Obrázky nakreslila a technicky upravila RNDr. Zita Sklenáriková, PhD.
[2] Názov zaviedol r. 1886 H. G. Zeuthen (1839 – 1920).

kvadratickej iracionality z už nájdenej kvadratickej iracionality. Vyjadrené dnešnou terminológiou – rovnice s jednou neznámou riešiteľné metódami geometrickej algebry majú stupeň nanajvýš 3, resp. v istých špeciálnych prípadoch stupeň 4.

Ďalším nedostatkom geometrickej algebry bola neschopnosť modelovať záporné čísla. (Dnes by sme túto ťažkosť prekonali jednoduchým zavedením orientácie.) V antike a v stredoveku – a to nielen v Európe – sa tento fakt ako nedostatok nepociťoval z jednoduchého dôvodu, že záporné čísla ako matematické objekty neexistovali nielen v európskej, ale ani v oveľa vyspelejšej arabskej matematike. Absencia záporných čísel v matematických prostriedkoch aritmetiky a algebry a následne aj v geometrickej algebre vylučovala z riešenia algebrických rovníc prípady, v ktorých koreňmi boli (v neskoršom chápaní) záporné čísla, čo sa v geometrickej algebre prejavilo incidenciou reprezentujúcej úsečky s polpriamkou, ktorá by v dnešnej sústave súradníc analytickej geometrie reálnej roviny bola *polosou* záporných súradníc.

Vlastné konštrukčné obmedzenia geometrickej algebry sú dané povahou prípustných konštrukcií tejto metódy. Ak za exaktné prípustné konštrukcie sa budú považovať len *euklidovské konštrukcie* realizovateľné výlučne pomocou lineára a kružidla – čo v antike nebolo pôvodne striktne formulované ani rešpektované – mnohé konštrukcie bude potrebné považovať za *aproximatívne* a aj v prípadoch rýdzo euklidovských konštrukcií výsledky získané grafickou cestou budú len *empirické* (so všetkými dôsledkami tohto statu).

V dnešnom školskom programe matematiky na stredných školách sa žiaci stretávajú s geometrickou algebrou v planimetrii euklidovskej roviny pri tzv. *konštrukciách algebrických výrazov*, v ktorých sa uplatňujú poznatky euklidovskej planimetrie ako Euklidove vety a Pytagorova veta o pravouhlých trojuholníkoch, Tálesova veta, podobnosť, špeciálne rovnoľahlosť a ďalšie elementárne výsledky. Učitelia, a tým viac žiaci sotva prenikajú do hĺbky podstaty tohto učiva a pri dnešnej praxi tvorby obsahu školskej matematiky a učebníc možno očakávať skoré vyradenie tejto tematiky z učebných osnov a učebníc.

2. Riešenie kubických rovníc v stredovekej arabskej algebre

Napriek obmedzenosti geometrickej algebry stredoveká arabská algebra pomocou nej výrazne pokročila v praxi riešenia kubických rovníc s jednou neznámou v porovnaní s výsledkami grécko-helenistickej matematiky v tejto oblasti. Dokázala to pritom s tými istými technickými prostriedkami, ktoré boli známe už v antike: prirodzené čísla, pomery prirodzených čísel, úmera a prostriedky geometrickej algebry vrátane kužeľosečiek. Arabskí autori pritom obvykle nemali k dispozícii kompletnú verziu Apolloniových *Kužeľosečiek*, ktorá by im bola umožnila zjednodušiť a skompletizovať niektoré riešenia. Pokrok arabskej algebry mal na jednej strane korene v tendencii arabskej matematiky k algoritmizácii, v čom sa zrejme prejavoval vplyv matematiky východných kultúr, najmä babylonskej a indickej, na druhej strane vo vlastnom prínose arabskej matematiky, prejavujúcom sa rozvinutejším chápaním pojmu čísla a sofistikovanejším prístupom k riešeniu problémov vo všetkých oblastiach matematiky, azda s výnimkou axiomaticko-deduktívnej metódy, hoci aj tam najmä prínosy al-Hajthama, Omara Chajjáma a at-Túsího v niektorých smeroch prekračovali limity Euklidovej koncepcie.

Markantným pokrokom v teórii a praxi riešenia kubických rovníc bola klasifikácia *typov* rovníc, ktorú podal Omar Chajjám. Jeho 14 typov kubických rovníc je dnešnému čitateľovi zrozumiteľných za predpokladu uvedomenia si, že v rovnosti dvoch výrazov s mocninami neznámych stupňov 0 až 3 nemôžu vystupovať iné koeficienty než kladné čísla; prípadný záporný koeficient sa odstráni prevodom člena na druhú stranu rovnice. Vypadnutie člena následkom nulového koeficienta pridáva ďalší typ do úplného zoznamu. Navyše si treba uvedomiť, že arabskí matematici 11. – 15. storočia prakticky nedisponovali prehľadnou aritmeticko-algebrickou symbolikou pre relácie a operácie, čo sťažovalo slovné vyjadrovanie úkonov, v dnešnej matematike rutinne realizovaných pomocou pohodlnej symboliky.

Nasledujúce ukážky riešenia dvoch typov kubickej rovnice prostriedkami geometrickej algebry sú demonštráciou dômyselných úvah a obratných konštrukčných krokov, ktorými Omar Chajjám (1048 – 1131) získal geometrickú reprezentáciu kladných reálnych koreňov kubických rovníc. (Všetky relácie a operácie zapísané dnešnou symbolikou sú v originálnom traktáte O. Chajjáma vyjadrované slovne. – Ide o tzv. *rétorickú etapu* vývoja algebry.)

1. Kubickú rovnicu

$$x^3 + ax = b \qquad (1)$$

s kladnými koeficientmi a, b prevádza Chajjám rešpektovaním princípu homogenity najprv na tvar

$$x^3 + p^2 x = p^2 q \qquad (1')$$

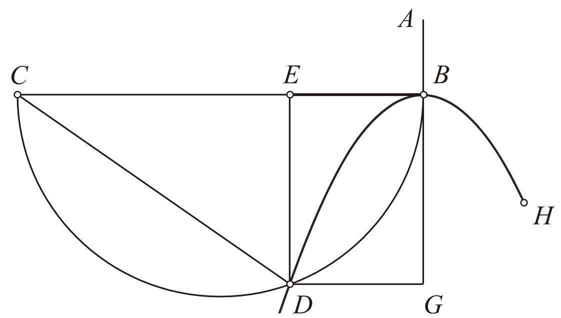
s kladnými koeficientmi p a q, ktoré majú za použitia metód geometrickej algebry známu geometrickú interpretáciu. Potom reálny koreň rovnice (1) (alebo (1′)) má geometrické vyjadrenie v reálnej euklidovskej rovine (o inej sa v stredoveku neuvažovalo) ako súradnica x (úsečka!) (v pravouhlej karteziánskej sústave súradníc) spoločného bodu *kružnice* s rovnicou

$$x^2 + y^2 = qx \qquad (3)$$

a *paraboly* s rovnicou

$$x^2 = py \qquad (4)$$

rôzneho od začiatku sústavy súradníc O.



Obr. 1

Na obr. 1 sú kružnica s rovnicou (3) a parabola s rovnicou (4) zobrazené v pravouhlej karteziánskej sústave súradníc s osami $x = \leftrightarrow BC$, $y = \leftrightarrow BG$ a s orientáciou osí opačnou vzhľadom na dnešný úzus. (Ide o priblíženie spôsobu chápania a geometrického zobrazovania v autorovom origináli.) Súradnica x spoločného bodu D kružnice a paraboly, rôzneho od bodu $B = O$ (začiatok sústavy súradníc), je reprezentovaná úsečkou BE.

Jadrom riešenia úlohy je dôkaz, že súradnica $x = |BE|$ bodu D je koreňom rovnice (1) (ekvivalentne – rovnice (1′)). – Dôkaz sa zakladá na nasledovných úpravách.

Rovnica paraboly (4) je ekvivalentná s úmerou

$$x : y = p : x$$

ktorá prepísaná do tvaru rovnosti zlomkov má tvar

$$\frac{x}{y} = \frac{p}{x} \qquad (4')$$

Rovnica je definovaná pre $x \neq 0$ a $y \neq 0$. Teda akýkoľvek vyhovujúci spoločný bod kriviek (3) a (4) musí byť rôzny od bodu $O = B$.

Rovnicu kružnice (3) možno najprv prepísať na tvar

$$y^2 = x(q-x)$$

čo je ekvivalentné s úmerou

$$x : y = y : (q-x)$$

ktorá napísaná pomocou zlomkov má tvar rovnice

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{q-x} \qquad (3')$$

definovanej za podmienok $y \neq 0$, $q - x \neq 0$.

Vyjadrenie výrazu $\frac{x^2}{y^2}$ z rovníc (4′) a (3′) a uvedenie do rovnosti pravých strán takto upravených rovníc dáva s využitím (3) výsledok

$$\frac{p^2}{x^2} = \frac{x}{q-x} \qquad (1'')$$

čo po úprave dáva rovnicu (1′).

Dve kužeľosečky v reálnej euklidovskej rovine majú najviac štyri spoločné body. Keďže kubická rovnica s jednou neznámou s reálnymi koeficientmi má najviac tri reálne korene, v prípade maximálneho počtu spoločných bodov dvoch kužeľosečiek použitých na geometrické riešenie kubickej rovnice musí byť jeden priesečník akcidentálny a jeho súradnica x v príslušnej sústave súradníc nie je koreňom skúmanej kubickej rovnice.

Úplné riešenie rovnice (1) vyžaduje ešte diskusiu o prípustných hodnotách koeficientov a, b, sprostredkovane o prípustných hodnotách koeficientov p, q v rovnici (1′) a o dôsledkoch pre korene rovnice (1). Existencia jediného reálneho koreňa rovnice (1) je zaručená vlastnosťami geometrického modelu skonštruovaného prostriedkami geometrickej algebry. (Potvrdenie tohto výsledku možno dostať rýdzo algebrickým spôsobom pomocou dnešných prostriedkov algebry – výpočtom diskriminantu rovnice (1).)

2. Geometricky komplikovanejšie je riešenie kubickej rovnice

$$x^3 + a = bx \qquad (5)$$

s neznámou x a kladnými koeficientmi a, b. Homogenizácia rovnice (5) vedie na rovnicu

$$x^3 + p^3 = q^2 x \qquad (5')$$

kde p, q sú zrejmé kladné reálne čísla. Korene rovnice (5) alebo (5′) sú v tomto prípade tie súradnice x priesečníkov paraboly s rovnicou

$$y = \frac{1}{q} x^2 \qquad (6)$$

a rovnoosovej hyperboly s rovnicou

$$x^2 - y^2 = \frac{p^3}{q^2} x \qquad (7)$$

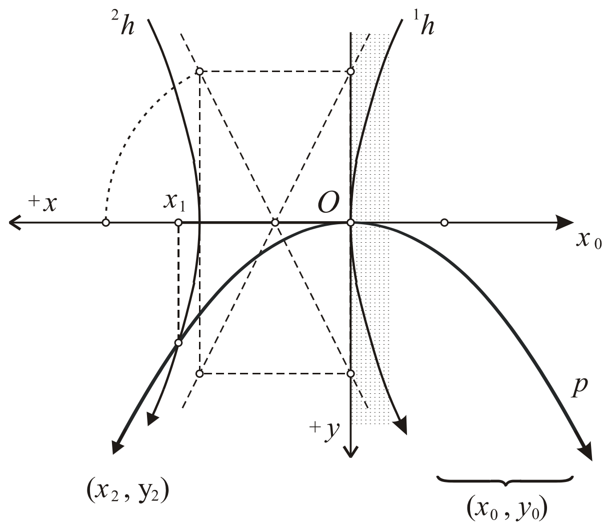
ktoré sú kladné (ak také priesečníky existujú) (obr. 2a, 2b). (Z technických príčin sú v obrázkoch mierky na osiach x, y zvolené rôzne.) Obe krivky majú spoločný začiatok sústavy súradníc O, ktorý je vo vzťahu ku koreňom rovnice (5) (ekvivalentne (5′)) akcidentálny. Ekvivalenciu množiny všetkých koreňov x rovnice (5) alebo (5′) s množinou súradníc x všetkých neakcidentálnych priesečníkov paraboly (6) s hyperbolou (7) ukazuje nasledovná úvaha:

Rovnica paraboly (6) je ekvivalentná s úmerou (napísanou v tvare rovnosti dvoch zlomkov)

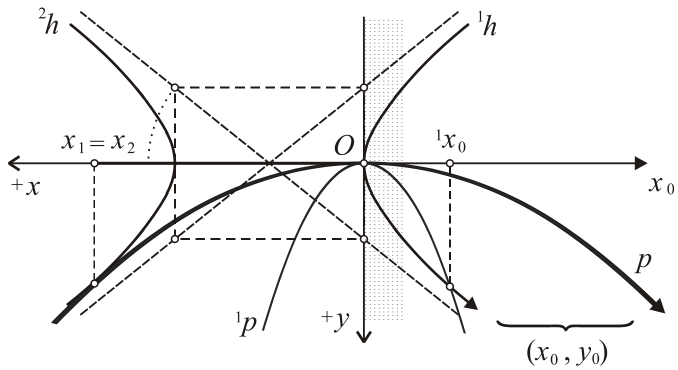
$$\frac{y}{x}=\frac{x}{q} \qquad (6')$$

a rovnica hyperboly je ekvivalentná s úmerou (napísanou takisto v tvare rovnosti zlomkov)

$$\frac{y}{x}=\frac{x-\frac{p^3}{q^2}}{y} \qquad (7')$$



Obr. 2a



Obr. 2b

Vyjadrenie výrazu $\frac{y^2}{x^2}$ z rovníc (6′) a (7′) a porovnanie pravých strán upravených rovníc (pri splnení všetkých podmienok existencie vyskytujúcich sa výrazov) dáva s využitím (7) po úprave rovnicu

$$x^3=q^2x-p^3 \qquad (5'')$$

ekvivalentnú s rovnicou (5′).

Hyperbola (7) má súradnicovú os x za nositeľku hlavnej osi, jedna vetva ^1h tejto hyperboly má bod O za svoj vrchol a všetky ostatné body tejto vetvy majú súradnicu x zápornú. Preto ďalší priesečník paraboly s touto vetvou (bod (x_0, y_0) v obr. 2a, 2b) je vzhľadom na hľadanie koreňov metódou geometrickej algebry irelevantný. Druhá vetva ^2h hyperboly má všetky body so súradnicou x kladnou a môže parabolu preťať v dvoch bodoch (obr. 2a), môže sa jej dotýkať (obr. 2b – parabola p) a nemusí mať s parabolou žiadny spoločný bod (obr. 2b – parabola ^1p).

Diskusia o počte kladných reálnych koreňov rovnice (5) v závislosti od hodnôt koeficientov a, b a ich vzťahu by vychádzajúc z geometrického riešenia bez použitia ďalších metód algebricko-analytickej povahy bola ťažkopádna a málo efektívna. Prehľadné a algebricky relatívne jednoduché riešenie prináša použitie výsledkov o diskriminante rovnice, založených na metódach algebrického riešenia, rozvíjaných od 16. storočia, keď sa podarilo problém hľadania koreňov kubickej rovnice prvý raz v úplnosti vyriešiť.

3. Aproximatívne konštrukcie pravidelných mnohouholníkov

Za použitie metód geometrickej algebry možno v širšom zmysle považovať aj geometrické konštrukcie, v ktorých treba geometrickými prostriedkami, napr. tradičnými rysovacími nástrojmi – pravítkom, kružidlom, lineárnym meradlom, uhlomerom ap. – skonštruovať obvyklé geometrické objekty určené sčasti alebo úplne údajmi, v ktorých sa vyskytujú transcendentné čísla. Ako je známe, nástrojmi euklidovských konštrukcií – pravítkom a kružidlom – možno teoreticky presne skonštruovať geometricky len *euklidovské čísla* – prvky *euklidovského poľa* ([1]). Presnosť geometrickej konštrukcie akéhokoľvek iného druhu čísel reprezentovaných úsečkami je len *aproximatívna* bez ohľadu na vizuálny vnem, ktorý môže signalizovať „dokonalú“ presnosť.

Z teórie je známe ([1]), že euklidovsky konštruovateľné sú práve pravidelné (rovinné) n-uholníky s počtom strán rovnajúcim sa jednému z čísel s prvočíselným rozkladom

$$n = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r},\ e_i \in N,\ i = 1, \dots, r; \qquad (8)$$

kde jedným z činiteľov je ľubovoľná mocnina čísla 2 a nepárne činitele rozkladu majú tvar $2^{2^h} + 1, h \in N$ (Fermatove prvočísla) a sú len v prvej mocnine.

Z prvej desiatky prirodzených čísel tento tvar nemajú čísla 7 a 9. Výskyt transcendentných čísel v údajoch na konštrukciu strán pravidelného sedemuholníka, resp.deväťuholníka je zrejmý z goniometrického vyjadrenia dĺžok ich strán v závislosti od dĺžky polomeru r kružnice opísanej sedemuholníku, resp. deväťuholníku:

$$a_7 = 2r.\sin\frac{\pi}{7};\ a_9 = 2r.\sin\frac{\pi}{9}$$

Vrcholy pravidelného sedemuholníka, resp. deväťuholníka vpísaného do kružnice s dĺžkou polomeru 1 možno znázorniť v Gaussovej rovine komplexných čísel ako obrazy koreňov binomickej rovnice

$$x^7 - 1 = 0 \qquad (9)$$

resp.

$$x^9 - 1 = 0 \qquad (10)$$

Všetky korene rovnice (9) majú tvar

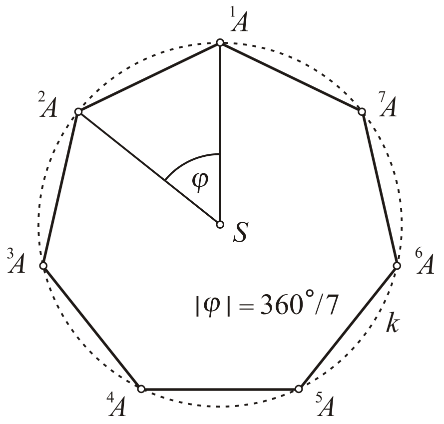
$$x_k = \cos k.\frac{2\pi}{7} + i.\sin k.\frac{2\pi}{7},\ k = 0, 1, \dots, 6; \qquad (11)$$

všetky korene rovnice (10) majú tvar

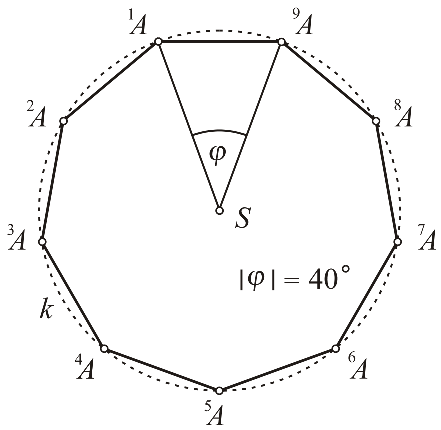
$$x_k = \cos k.\frac{2\pi}{9} + i.\sin k.\frac{2\pi}{9},\ k = 0, 1, \dots, 8 \qquad (12)$$

Na obr. 3 je znázornený pravidelný sedemuholník, na obr. 4 pravidelný deväťuholník. Obrázky boli zhotovené v programe COREL, čo implicitne znamená, že transcendentné hodnoty dĺžok strán sú zastúpené racionálnymi aproximáciami. Bežnými meracími prostriedkami, tým menej vizuálne nie je možné odhaliť odchýlky aproximácie, prípadné narušenia zhodnosti strán, resp. vnútorných uhlov v tom istom mnohouholníku. Pre laika neoboznámeného s podstatou teórie je to presvedčivý dôkaz o *presnosti* konštrukcie. Z hľadiska teórie geometrických konštrukcií je zrejmé, že konštrukcie týchto dvoch mnohouholníkov nemôžu byť iné než aproximatívne.

Uvedené príklady ukazujú, že spojenie algebry a geometrie v geometrickej algebre má aj v súčasnej matematike a najmä v školskej matematike miesto pre svoje uplatnenie. Zmenila sa však úloha geometrickej algebry: namiesto výskumnej a generatívnej metódy sa stala nástrojom ilustrácie a interpretácie presných výsledkov algebry názornejšími a z didaktického hľadiska efektívnejšími prostriedkami.



Obr. 3



Obr. 4

4. Záver

Geometrická algebra zohrávala v staroveku a v stredoveku progresívnu úlohu v riešení istého okruhu problémov algebry. Pokrok v metódach algebry a v rozvoji algebrickej symboliky, ako aj analytická metóda založená o. i. na tomto pokroku prekonali limity tvorivých možností geometrickej algebry a vymedzili historické hranice jej progresívneho pôsobenia. Naďalej si však zachováva svoju pozitívnu úlohu v geometrickej interpretácii niektorých výsledkov algebry, osobitne v školskej matematike, kde môže napomáhať vytváranie predstáv o vnútornej jednote matematiky a o vzájomných súvislostiach jej jednotlivých disciplín.

Literatúra

[1] ČIŽMÁR, J. *Euklidovské konštrukcie*. In: *Proceedings SCG ´99, Vol. 8.* Bratislava: Vydavateľstvo STU, 1999, 31 – 47` ISBN 80-227-1307-4

[2] ČIŽMÁR, J. *Aproximatívne geometrické konštrukcie.* In: *Proceedings SCG ´2009, Vol. 18.* Bratislava: Vydavateľstvo STU, 2009. ISBN 978-80-227-3141-6, s. 39 – 44

[3] WAERDEN, VAN DER, B. L. *Probuždajuščajasia nauka.* Moskva: Gosudarstvennoje izdateľstvo fiziko-matematičeskoj literatury, 1959; preklad z holandčiny

[4] KOLMAN, A. *Dějiny matematiky ve starověku*. Praha: Academia, 1968; preklad z ruštiny

[5] JUŠKEVIČ, A. P. *Dějiny matematiky ve středověku*. Praha: Academia, 1977; preklad z ruštiny