DIDAKTICKÉ VYUŽITIE INTUÍCIE V PROCESE ZÍSKAVANIA MATEMATICKÝCH POZNATKOV

Oliver Židek

Katedra matematiky a informatiky, Pedagogická fakulta, Trnavská univerzita
Priemyselná 4, P. O. Box 9, 918 43 Trnava, SR
e-mail: ozidek@truni.sk

Abstract. The contribution shows an illustration of didactical use of intuition in an attempt to list all types of deltahedra. It shows how intuition helps to solve the problem and how it can be misleading. We use elements of manipulative geometry in the activity.

Key words: intuition, manipulative geometry, deltahedron.

1. Úvod

Príspevok obsahuje didaktickú ukážku využitia intuície pri pokuse určiť množinu všetkých typov deltaédrov. V navrhovanom didaktickom postupe sa ukáže, ako intuícia môže pomáhať, a zároveň, ako môže zlyhať. Vyučovacia aktivita využíva technológiu manipulačnej geometrie.

2. Z histórie deltaédrov

Z piatich Platónových telies (4-sten, 6-sten, 8-sten, 12-sten, 20-sten) osobitnú skupinu tvoria telesá – pravidelný štvorsten, osemsten a dvadsaťsten (majú zhodné trojuholníkové steny). Táto vlastnosť ich zaraďuje do početnejšej skupiny telies (konvexných mnohostenov), ktorých všetky steny sú zhodné rovnostranné trojuholníky. Telesá s uvedenými vlastnosťami budeme nazývať deltaédry (z gréckeho éder-stena, polyéder - mnohosten).

Zatiaľ čo pravidelné mnohosteny boli centrom pozornosti matematikov i nematematikov už od antických čias, konečná množina všetkých typov deltaédrov bola identifikovaná až v roku 1947 v práci autorov Freudenthála a Waerdena (Gowan, 1978). Definíciu deltaédrov môžeme dostať malou úpravou definície pravidelných mnohostenov vynechaním požiadavky, aby pri každom vrchole bol zoskupený rovnaký počet stien (hrán). Podnetom pre určenie množiny všetkých typov deltaédrov môže byť aj neúplnosť určenia pravidelných mnohostenov v práci [4] (Sedláček, 1981), a taktiež tvrdenie v českom preklade Euklidových Základov (Servít, 1907).

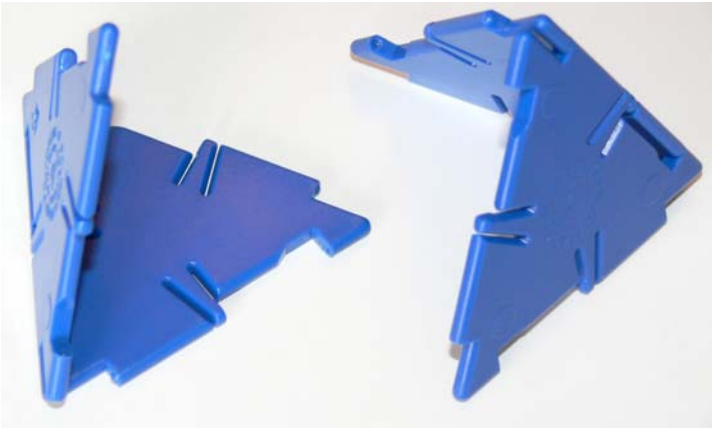
3. Didaktické zázemie problému

Objaviteľských zamestnaní v didaktických prístupoch a postupoch nie je nikdy dosť. Sú protipólom tradičných didaktických technológií, ktorých cieľom bolo poskytnúť žiakom čo najviac poznatkov a úlohou žiakov bolo tieto poznatky si zapamätať, resp. obratne ich využívať. Poznávací proces založený na heuristike akcentuje bádanie, experimentovanie, tvorenie hypotéz a ich overovanie. Pri tomto postupe sa dá, v maximálne užitočnej miere, pozitívne využiť intuícia a zároveň navodiť taká situácia, aby sa funkcia intuície nestala univerzálnou a jedinou. Najlepším riešením obavy z tohto dôsledku je ukázať, že intuícia môže pomáhať, ale i zlyhať. Výhodnou technológiou pri „objavovaní“ telies a ich vlastností je geometrické modelovanie, ktoré sa dá realizovať nielen archaickými metódami „rysuj – strihaj – lep“, ale aj modernými stavebnicami, napr. niektorou zo súprav Polydron (http://www.polydron.com).

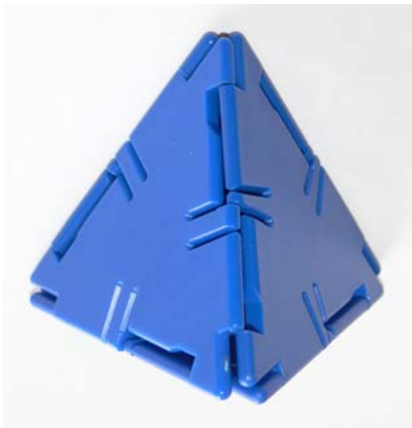
4. Didaktický problém a pracovný postup

Úloha: *Zhotovte modely konvexných telies, ktorých všetky steny sú zhodné rovnostranné trojuholníky. Začnite telesom, ktoré má minimálny počet stien.*

Riešenie: Ak spojíme modely dvoch trojuholníkových stien do tzv. „dlaždičky“ , dá sa vhodným zoskupením takýchto dlaždíc získať model pravidelného tetraédra, ktorý spĺňa počiatočnú požiadavku našej úlohy *(Obr.1a, 1b)*.



Obr.1a. Dve dlaždičky.



Obr.1b. Štvorsten.

Na vytvorenie ďalšieho deltaédra z predchádzajúceho modelu treba dodržať tieto zásady:

1. V danom telese nájsť dva nesusedné vrcholy A a B (ak je to možné), ktoré majú v tomto telese najmenší stupeň vrchola (počet hrán „vychádzajúcich“ z daného vrchola).
2. Vhodne „rozrezať teleso“ po jeho hranách z vrcholu A do B.
3. Otvoriť teleso v mieste, kde je rozrezané, vložiť „dlaždičku“ a upevniť.

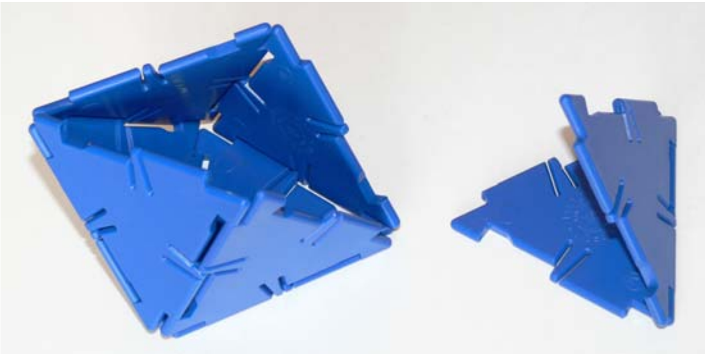
Obr. 2a. „Otvorený štvorsten a dlaždička“.

Obr. 2b. Šesťsten.

Sledujte, ako z daného telesa vzniká nové. V prípade štvorstena sú všetky vrcholy trojstupňové a naviac všetky sú susedné (neberte do úvahy zásadu 1).

Keď ste zvolili ktorékoľvek dva vrcholy štvorstena, „rozrežte“ teleso a vložte jednu „dlaždičku“. Výsledný model je šesťstenný deltaéder – triangulárna dipyramída *(Obr. 2a, 2b)*.

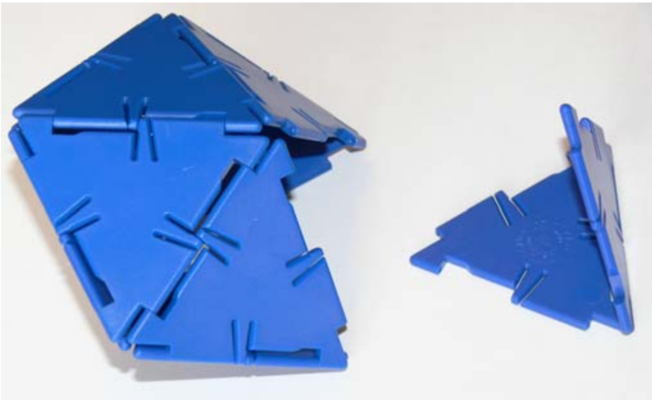
Deltaéder so šiestimi stenami má 4 štvorstupňové a 2 trojstupňové vrcholy. Podľa uvedených zásad máme k ďalšej činnosti vybrať dva trojstupňové vrcholy. Pretože sú skutočne nesusedné, „rozrežte“ model pozdĺž dvoch hrán, ktoré uvažované vrcholy spájajú, vložte „dlaždičku“ a upevnite. Vznikol tak pravidelný osemsten *(Obr.3a, 3b)*.



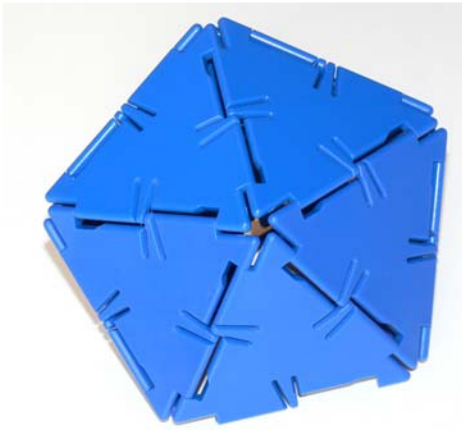
Obr. 3a. „Otvorený šesťsten a dlaždička“.

Obr. 3b. Osemsten.

Všetky vrcholy osemstena sú štvorstupňové, takže každý z nich bude mať v tomto telese najmenšiu stupňovú hodnotu. Treba sa však ubezpečiť, či dva zvolené vrcholy sú nesusedné. Podobne ako v predchádzajúcich krokoch získame ďalší model telesa zo skupiny deltaédrov, t. j. 10-stenný deltaéder, nazývaný tiež pentagonálna dipyramída *(Obr. 4a, 4b)*.

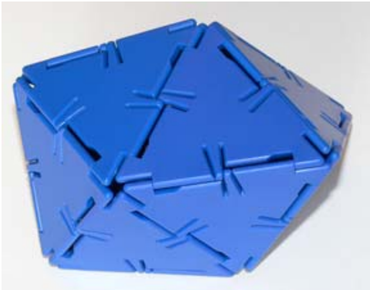


Obr.4a: „Otvorený osemsten a dlaždička“.



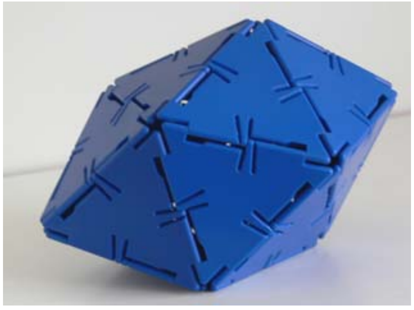
Obr.4b: Desaťsten.

Ak pravidlá rekurzie dodržíte presne, bez ťažkostí môžete vytvoriť sedem deltaédrov: okrem už uvedených telies (4-sten, 6-sten, 8-sten,10-sten), vzniknú: 12-sten *(Obr. 5)*, 14-sten *(Obr. 6)*, 16-sten *(Obr. 7)*.



Obr.5: Dvanásťsten.

Obr. 6: Štrnásťsten.



Obr.7: Šesťnásťsten.

Keď sa pokúsime skonštruovať ôsmy deltaéder, vznikne vážny problém. V siedmom telese (16-stenný deltaéder) máme podľa pravidla 1 nájsť dva 4-stupňové vrcholy. Stane sa však, že hoci tieto vrcholy nie sú susedné, nemožno teleso po hranách „rozrezať“ tak, aby bolo možné k daným 16-tim stenám pridať ďalšiu „dlaždičku“, t. j. 2 steny. Doterajší postup v tomto prípade zlyháva.

Spojte však zvyšné dve „dlaždičky“ (spolu 4 steny) a „rozrežte“ 16-sten po hranách spájajúcich dva 4-stupňové vrcholy. Keď do vzniknutého otvoru *(Obr. 8a)* vložíte „zdvojenú dlaždičku“, vytvorí sa posledný – 20-stenný ikosaéder *(Obr. 8b)*.

Obr. 8a: „Otvorený 16-sten.“

Obr. 8b: Dvadsaťsten.

Zaujímavý prehľad o množine všetkých deltaédrov môžeme získať z tabuľky, kde prvé tri stĺpce obsahujú údaje o počte vrcholov, stien a hrán jednotlivých deltaédrov a ďalšie 3 stĺpce vyjadrujú počet vrcholov tretieho, štvrtého a piateho stupňa. Čitateľ sa ľahko presvedčí o tom, že iné stupne vrcholov než uvedené (t. j. 3, 4, 5) v deltaédroch neexistujú.

	Deltaéder typu	**vrcholy**	**steny**	**hrany**	Vrcholy stupňa		
					3	**4**	**5**
1.	4-sten	4	4	6	4	0	0
2.	6-sten	5	6	9	2	3	0
3.	8-sten	6	8	12	0	6	0
4.	10-sten	7	10	15	0	5	2
5.	12-sten	8	12	18	0	4	4
6.	14-sten	9	14	21	0	3	6
7.	16-sten	10	16	24	0	2	8
	X	*11*	*18*	*27*	*0*	*1*	*10*
8.	20-sten	12	20	30	0	0	12

Pohľad na údaje v tabuľke v prvých siedmych riadkoch a v 9. riadku vnucuje myšlienku vyplniť prázdne miesta v neúplnej tabuľke tak, aby sme zachovali zdanlivo evidentnú zákonitosť (postupnosť). I napriek skutočnosti, že údaje *v*, *s*, *h* spĺňajú číselne známy eulerovský vzťah ($v + s = h + 2$), realita odmieta podrobiť sa predstave o ideálnom poriadku. Z didaktického hľadiska je uvedený jav pekným príkladom toho, ako intuícia v matematike pomáha, ale zároveň niekedy zlyháva. Domnienky založené na odpozorovanej zákonitosti mali a určite budú mať dôležitú funkciu v pokroku matematiky, avšak empirické teórie musia byť dokázané. Toto chýbajúce ohnivko (neexistujúce teleso typu X) v „rodine deltaédrov“ nás poučí o chybách vyplývajúcich z nesprávneho zovšeobecňovania.

V práci (Bernal, 1960) autor tvrdí, že 5 typov deltaédrov (4-sten, 8-sten, 12-sten, 14-sten a 16-sten) sa vyskytuje bežne v prírode. Molekuly niektorých tekutín sa zoskupujú v jednej, či viacerých z týchto konfigurácií deltaédrov. Zaujímavý je taktiež názor autora, že neuznáva osobitnú existenciu 3 typov deltaédrov. Šesťsten, desaťsten a dvadsaťsten nepovažuje za individuálne štruktúry, ale za akési zoskupenia štvorstenov. Čitateľ sa ľahko presvedčí o tom, že uvedené telesá sa môžu vytvoriť z dvoch, desiatich alebo dvadsiatich 4-stenových blokov, avšak s tým rozdielom (autor to neuvádza), že pri šesťstene sú štvorsteny, z ktorých sa vzniknuté teleso skladá pravidelné, ale v ďalších dvoch telesách nie je táto podmienka splnená.

5. Záver

Z pedagogickej praxe učiteľov matematiky všetkých stupňov škôl sú známe ťažkosti s výučbou stereometrie, a tým aj s rozvojom priestorovej predstavivosti (Molnár, 2004). Uvedené, ale i ďalšie telesá neboli obsahom výučby matematiky v minulosti najmä z dôvodu ich neľahkého zobrazovania. V súčasnosti tento problém čiastočne odstraňuje vhodný didaktický softvér napr. Poly (http://www.peda.com). Úlohou didaktikov matematiky je siahnuť po takých technológiách, ktoré túto výučbu uľahčujú a prinášajú aj ďalšie didaktické efekty (Žilková, 2004). Objaviteľský prístup s využitím *funkcie intuície*, vrátane ukážky jej zlyhania, plní požiadavky na modernizovaný vyučovací proces. Prezentovaná problematika je riešená v rámci výskumnej úlohy KEGA 3/3073/05, ako súčasť elektronickej učebnice didaktiky elementárnej matematiky.

Literatúra

[1] BERNAL, J. D. *The Structure of Liquids*. Scientific American, August 1960.

[2] GOWAN, V. E. A *Recursive Aproach to the Construction of the Deltahedra*. Mathemat. Teacher, March 1978, Number 3.

[3] MOLNÁR, J. *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 1.vyd., 2004, 89 s., ISBN 80-244-0927-3.

[4] SEDLÁČEK, J. et al. 1981. *Slovník školské matematiky.* Praha : SPN, 1981. 239 s., 14-614-81.

[5] SERVÍT, F. *Euklidovy Základy.* Z gréckeho originálu český preklad, Praha 1907.

[6] ŽIDEK, O. *O pravidelných mnohostenoch na základnej škole.* In: Matematika a fyzika ve škole, roč.13, č. 8.

[7] ŽILKOVÁ, K. *Komparácia možností využívania štandardných učebníc matematiky a prostriedkov IKT.* In: Úloha učebnice vo vyučovaní matematiky, Nitra: FPV UKF, 2004, ISBN 80-8050-801-1.